# CONCOURS COMMUN MINES.PONTS.TELECOM...1979

## OPTIONS M, P' ET TA - EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 2 HEURES)

-----

N.B. 1°) On rappelle que la relation entre nombres réels :

$$y = \text{Arctg } x$$

équivaut à :

$$x = \text{tg } y \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} .$$

2°) Le symbole Log x désigne le logarithme népérien de x.

3°) Sont autorisés, pour cette épreuve, tous les instruments de calcul, tables, avec ou sans formulaires, règles à calcul, cercles à calcul, calculatrices de poche, à alimentation autonome, quelles qu'en soient la marque et le type, programmables ou non et non imprimantes.

°°°°

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{\sqrt{x}} \text{ Arctg } \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1+x}{2\sqrt{-x}} \text{ Log} \left| \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| & \text{si } x < 0 \text{ et } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue pour tout x réel et qu'elle est indéfiniment dérivable pour tout x tel que $x \neq 0$ et $x \neq -1$.

Est-ce que la fonction f est dérivable en 0 ? en - 1 ?

Pour $|x| < 1$, f(x) est la somme d'une série entière en x ; soit $a_n x^n$ $n = 0,1,2,\ldots$ le terme général de cette série ; calculer $a_n$ en fonction de n.

Soit $S_n(x)$ la somme des n + 1 premiers termes de la série entière :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$$

Déterminer une valeur de n telle que :

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - S_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-12}$$

2°) On suppose $x \geqslant 0$ dans cette question et dans la suivante.

Soit g la fonction d'une variable réelle positive telle que l'on ait, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = g(\sqrt{x})$$

Expliciter g(u), u désignant un réel positif ou nul.

Calculer g'(u) et déterminer son signe :

- lorsque $u \geqslant 1$ ;
- lorsque $0 \leqslant u < 1$ .

On devra, dans ce dernier cas, poser :

$$g'(u) = \frac{1-u^2}{u^2} h(u)$$

et étudier le signe de h(u) à partir du tableau de variation de cette fonction.

.../...

Déduire de ce qui précède le signe de $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$, puis le tableau de variation de $f(x)$ lorsque $x$ décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ .

3°) Calculer en fonction de $u$ l'expression $A(u) = u\,g''(u) - g'(u)$ et étudier son signe en s'inspirant de la question précédente. (On devra distinguer les deux cas $u \geqslant \sqrt{3}$ et $0 \leqslant u < \sqrt{3}$). En déduire le signe de $f''(x)$ si $x \geqslant 0$.

4°) On suppose maintenant $x \leqslant 0$ dans cette question et dans la suivante.

Soit $g_1$ la fonction d'une variable réelle positive telle que l'on ait, pour tout $x \leqslant 0$,

$$f(x) = g_1(\sqrt{-x})$$

Expliciter $g_1(u)$, $u$ désignant un réel positif ou nul.

Calculer $g'_1(u)$ et déterminer son signe en introduisant $h_1$ telle que :

$$g'_1(u) = \frac{1+u^2}{u^2}\, h_1(u) \; .$$

Déduire de ce qui précède le signe de $f'(x)$ pour $x \leqslant 0$ et $x \neq -1$, puis le tableau de variation de $f(x)$ lorsque $x$ décrit l'intervalle $]-\infty,0]$.

5°) Calculer, en fonction de $u$, l'expression $A_1(u) = u\,g''_1(u) - g'_1(u)$ ; étudier son signe (en faisant appel, le cas échéant, à une fonction auxiliaire), puis en déduire le signe de $f''(x)$ si $x \leqslant 0$ et $x \neq -1$ .

6°) On suppose de nouveau $x \geqslant 0$ dans cette question et dans la suivante.

Montrer qu'il existe des constantes $a$ et $b$, que l'on calculera, telle que :

$$f(x) = a\sqrt{x} + b + r(x) \; , \quad \lim_{x \to +\infty} r(x) = 0 \; .$$

Donner un infiniment petit très simple équivalent à $r(x)$ lorsque $x \to +\infty$ .

Construire la demi-parabole (P) d'équation $y = a\sqrt{x} + b$ ; situer, par rapport à (P), la branche infinie, correspondant à $x$ tendant vers $+\infty$, de la courbe (C) d'équation $y = f(x)$.

7°) Soit $t$ la fonction d'une variable réelle positive, continue sur $[0,+\infty[$, telle que l'on ait, pour tout $x > 0$,

$$f(x) - (a\sqrt{x} + b) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, t(\sqrt{x}) \quad ,$$

$a$ et $b$ ayant les valeurs trouvées au 6°).

Expliciter $t(u)$, $u$ désignant un réel positif ou nul.

Etudier les variations de $t(u)$ lorsque $u$ décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ .

Déduire du tableau de variation trouvé l'existence -ou la non-existence- de points communs à (C) et à (P).

8°) Dessiner soigneusement (C) et (P) sur une même figure.

Préciser notamment les tangentes à (C) aux points A(0,1) et B(-1,0) et la position de (C) par rapport aux deux tangentes considérées.

9°) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} [f(x) + 1]\, dx$ est-elle convergente ?

$a$ et $b$ ayant les valeurs trouvées au 6°), l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(x) - a\sqrt{x} - b]\,dx$ est-elle convergente ?