Exercice I

Informatique

Exercice II

$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$

1°. Soit $g(x) = x - e^{-x}$

$$g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$$

g est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ car

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty:$$

Donc 0 possède un seul antécédent $x_0 \in \mathbb{R}$.

2°. f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
&(x_0, y_0) \text{ est } 1 \text{ point critique de } f \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0\\
&\iff \begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - e^{-x_0} = 0 \\ -2x_0 + 4y_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_0 - 4y_0 - 2e^{-x_0} = 0 \\ -2x_0 + 4y_0 = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ x_0 = 2y_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente x_0 et par conséquent y_0 sont uniques.

3°. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, Soit

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+e^{-x_0} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\det H = 4\left(2+e^{-x_0}\right) - 4 = 4\left(1+e^{-x}\right) > 0\\
&\operatorname{Tr} H = 6 + e^{-x_0} > 0 : \text{ou bien seulement } r = 2 + e^{-x_0} > 0
\end{aligned}$$

Donc f présente un minimum local en (x_0, y_0)

Problème

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

1°.
— $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{x+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

— $\dfrac{x^{\alpha-1}}{x+1} \underset{0}{\sim} x^{\alpha-1} = \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$, or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1-\alpha < 1$, donc $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{x+1}$, est intégrable sur $]0,1[$.

— $\dfrac{x^{\alpha-1}}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^{\alpha-1}}{x} = \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2-\alpha > 1$. Donc $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{x+1}$ es intégrable sur $[1,+\infty[$.

2^o. Avec le changement de variable suivant $x = \dfrac{1}{t}$, on obtient :

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = -\int_1^0 \frac{t^{1-\alpha}}{1+\frac{1}{t}} \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{t+1} dt = I(1-\alpha)$$

3^o.

$$x \in]0,1[. \quad f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n\right) x^{\alpha-1} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \text{ car } x \in]0,1[$$

On a $1 \in \overline{]0,1[}$

$\forall n \in \mathbb{N} \lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = (-1)^n$

Mais $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge grossièrement, par le théorème de la double limite : $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

4^o. $x \in]0,1[$: $\quad S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$.

— $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $]0,1[$.

— $x \in]0,1[$ fixé : $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $]0,1[$

— $x \in]0,1[$: $n \in \mathbb{N}$: $\quad S_n(x) = x^{\alpha-1} \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

Donc

$$\forall x \in]0,1], \quad |S_n(x)| \leqslant 2$$

et $x \longmapsto 2$ est intégrable sur $]0,1[$, le théorème de la convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = I(\alpha)$$

Or

$$\int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k+\alpha-1} dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+\alpha}$$

c'est à dire :

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

5^o.

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) = I(\alpha) + I(1-\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha}\right). \\ &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} : \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

6^o. Pour $x=0$ dans la formule admise précédente, on obtient.

$$1=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\alpha^2-n^2}\right).$$

par la question précédente : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

7^o. Soit $x>0$ fixé : $t\longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. - $t^{x-1}e^{-r}\underset{t\to0}{\sim}t^{x-1}=\dfrac{1}{t^{1-x}}$: or $t\longmapsto\dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1-x<1$, donc $t\longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

$t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, or $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison $t\longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Par conséquent $t\longmapsto t^{x-1}e^{-l}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

8^o. $\displaystyle f_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}dt$:

Posons $u(x,t)=\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$

— $\forall x\geqslant0;\quad t\longmapsto u(x,t)$ eat continue sur $]0,+\infty[$

— $\forall t>0.\quad x\longmapsto u(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

— $\forall t>0:\quad\forall x\geqslant0:\quad 0\leqslant u(x,t)\leqslant\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}=\varphi(t)$

et φ est continue er intégrable sur $]0,+\infty[$ c'est la question (Q9). Par le théorème de continuité sous signe intégrale, f_α est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

9^o. Montrons que f_α est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Posons $u(x,t)=\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$:

— $\forall x>0:\quad t\mapsto u(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ déjà fait.

— $\forall t>0:\quad x\longmapsto u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0,+\infty\right[$

— $\forall t>0:\forall x>0:\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-xt},\quad\forall x>0:\quad t\longmapsto\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$

— $\forall t>0:\forall x\in[a,b]\subset]0,+\infty[:\quad\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant t^\alpha e^{-at}=\omega(t):$

Or w est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. car $w(t)\underset{t\to+\infty}{=}0\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Alors f_α et $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x>0:\quad f_\alpha'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t}e^{-xt}dt$$

10^o. — $\forall x\geqslant0:\quad t\longmapsto\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}=u(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

— $\forall t>0:\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}=0$ et $t\to0$ est continue sur $[0,+\infty[$.

— $\forall t>0:\quad\forall x\geqslant0:\quad 0\leqslant\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}\leqslant\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ et $t\longmapsto\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de la convergence dominée s'applique et :

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u(x,t)\,dt = 0.$$

Remarque :

1) Si on avait des problèmes dans la majoration on peut prendre x dans l'intervalle $[1,+\infty[$.

2) On peut ne pas utiliser ce théorème, en remarquant que :

$$\forall t>0 : \forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} e^{-xt} \leqslant t^{\alpha-1} e^{-xt}$$

$$\text{donc } 0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt}\,dt$$

$$\text{avec } xt = y : \quad \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

alors $\quad 0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$.

11°. — $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$

— $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\quad \alpha < 1$.

— $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} 0\left(\dfrac{1}{t^2}\right) : \quad 2 > 1$:

Donc $t \longmapsto \dfrac{e^{-l}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$ converge.

Donc : $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$:

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = 0$.

Partie III : Vers la formule des compléments

12°. Avec le changement de variables $xt = y$, on obtient :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

13°. $g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$

Alors $\forall x > 0$:

$$g'_\alpha(x) = g_\alpha(x) + \Gamma(\alpha) e^x \left(\frac{-e^{-x}}{x^\alpha}\right) = g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Car $\quad \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = \int_x^0 \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = -\int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt.$

Donc

$$g_\alpha(x) - g'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

alors g_α est une solution particulière de $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

Alors $g_\alpha - f_\alpha$ est solution de $y - y' = 0$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \forall x > 0 : \quad g_\alpha(x) - f_\alpha(x) = \lambda e^x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$: et $\quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x) - \lambda e^x = e^x \left[\Gamma(\alpha) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt - \lambda\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt = 0$; donc $\lambda = 0$ [sinon absurde].

Alors : $\forall x > 0:\quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$

14^o. En faisant tendre $x \longrightarrow 0$ dans l'égalité précédente ; et le fait que f_α est continue sur $[0,+\infty[$ et que $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}dt = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt.$$

15^o. Soit $\alpha \in]0,1[$, alors $1-\alpha \in]0,1[$:
et $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt = \int_0^{+\infty}t^{-\alpha}e^{-t}dt = \Gamma(1-\alpha)$. Par la question 6 et Q 14 ; on obtient :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

16^o. Pour $\alpha = 1/2$: et $Q15$ donne :
$(\Gamma(1/2))^2 = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi:$ et puisque $\Gamma(1/2) > 0$. Donc

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Or $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}:$ et avec le changement de variables $y = \sqrt{t}$, $\quad\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$
Donc

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Pour vos remarques sadikoulmeki@yahoo.fr

Exercie I

Dans cet exercice d'informatique commune, on se propose d'écrire des algorithmes dans le but do faire du calcul matriciel et plus particulièrement afin d'utiliser les matrices d'adjacence d'un graphe. Les algorithmes demandes doivent être ecrits en langage Python. On sera trets attentif a la rédaction et notamment a lindentation du code.

L'usage de toute librairie est interdit.

Notation Les matrices sont carrées et représentées par des listes dont les éléments correspondent aux lignes de la matrice. Par exemple, la matrice

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est représentée par la liste $[[1,2],[3,4]]$.

Dans la suite, pour définir la matrice d'adjacence $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'un graphe ayant n sommets, on numérote ses sommets de 0 à $n-1$.

1^o. Ecrire une fonction produit (A,B) prenant en arguments deux matrices carrées A et B de mêmes dimensions et qui renvoie AB le produit de la matrice A par la matrice B.

2^o. Écrire une fonction oriente (A) prenant en argument la matrice d'adjacence A d'un graphe et qui retourne True si le graphe est orienté et False sinon.

3^o. On admet que le nombre de chemins de longueur p reliant i et j dans un graphe de matrice d'adjacence A est égal au coefficient d'indice (i,j) de la matrice A^p. Écrire une fonction distance (A,i,j) où A est la matrice d'adjacence d'un graphe et qui renvoie le nombre minimal d'arêtes que l'on doit parcourir pour atteindre le sommet j depuis le sommet i (on suppose qu'un tel chemin existe).

On considère deux tables : CLIENTS et PARTENAIRES. La première contient des informations sur les clients et la deuxième permet d'identifier qui sont les partenaires des clients.
La table CLIENTS contient les attributs suivants :
- id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire;
- nom (chaîne de caractères);
- prénom (chaîne de caractères);
- ville (chaîne de caractères);
- email (chaîne de caractères).

La table PARTENAIRES contient les attributs suivants :
- id : identifiant de suivi (entier), clé primaire;
- id-client : identifiant du client représenté par l'attribut id dans la table CLIENTS (entier); - partenaire : nom du partenaire (chaîne de caractères).

4^o. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les identifiants de tous les clients provenant de la ville de Toulouse.

5^o. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les emails de tous les clients ayant «SCEI» comme partenaire.

Exercie II

On definit la fonction $f:(x,y)\longmapsto x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$

6^o. Etablir que léquation $e^{-x}=x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

7^o. Demontrer que f possède un unique point critique $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

8^o. À Paide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0,y_0). Est-ce un minimum ou un maximum?

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

9°. Démontrer que $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

10°. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

11°. **1**re tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

12°. $\mathbf{2^e}$ tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

À raide du théorème de convergence dominèe, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

13°. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\right)$$

14°. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}dt$$

15°. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

16°. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

17°. Démontrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty|$ et calculer sa dérivée.

18°. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

19°. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$$

Partie III - Vers la formule des compléments

20°. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

21°. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$. En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

22°. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

23°. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

24°. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

FIN