

# CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2023

Épreuve de mathématiques II, PSI

(corrigé)

## 1 Nombre de points fixes d'une permutation

1. On a :  $\text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$ . Comme l'ensemble des dérangements de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est inclus dans  $\mathcal{S}_n$ , on a :  $d_n \leq \text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$ , donc :  $0 \leq \frac{d_n}{n!} \leq 1$ . Par le théorème de comparaison, on en déduit que le rayon de convergence  $R$  de  $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$  est supérieur ou égal à celui de  $\sum_{n \geq 0} x^n$ , qui vaut 1 (on reconnaît une série usuelle : c'est la série géométrique). On a donc :  $R \geq 1$ .

2. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On cherche à dénombrer  $(X_n = k)$ . Pour cela, on note que pour construire une permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  ayant exactement  $k$  points fixes :

— on choisit l'ensemble  $F$  de ses points fixes : cela revient à choisir  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (**il y a donc  $\binom{n}{k}$  possibilités**), et pour tout  $i \in F$  on pose :  $\sigma(i) = i$  ;

— on doit à présent définir l'image par  $\sigma$  des éléments de  $D = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus F$  ; pour cela, justifions que  $\sigma|_D$  doit être un dérangement de  $D$  :

—  $\sigma|_D$  est une application de  $D$  dans lui-même : en effet, s'il existe  $i \in D$  tel que :  $\sigma(i) = j \notin D$ , alors  $j$  appartient au complémentaire de  $D$  (c'est-à-dire  $F$ ), donc :  $j = \sigma(j)$ , mais on a alors :  $\sigma(i) = \sigma(j)$ , donc par injectivité de  $\sigma$  (on veut en effet que ce soit une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ) on a :  $i = j$ , ce qui est impossible puisque  $i \in D$  et  $j \notin D$  ; ainsi  $\sigma(D) \subseteq D$ , donc  $\sigma|_D$  est une application de  $D$  dans lui-même ;

—  $\sigma|_D$  est une permutation de  $D$  : en effet  $\sigma$  est injective, donc  $\sigma|_D$  également, et comme le cardinal de son ensemble de départ et d'arrivée est le même,  $\sigma|_D$  est une bijection de  $D$  dans  $D$  ;

—  $\sigma|_D$  est un dérangement de  $D$  : pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus F$ , on veut :  $\sigma(i) \neq i$  (dans le cas contraire, on aurait  $i \in F \cap (\llbracket 1, n \rrbracket \setminus F) = \emptyset$ , ce qui est absurde) ;

en résumé, pour définir  $\sigma|_D$ , il suffit de choisir un dérangement  $\tau$  de  $D$  (**comme  $D$  a  $n - k$  éléments, il y a  $d_{n-k}$  tels dérangements : nous justifierons ci-dessous plus en détails ce point**) et de poser  $\sigma|_D = \tau$  ;

— ayant défini  $\sigma$  sur  $F$  et  $D$ , et étant donné que  $F \cup D = \llbracket 1, n \rrbracket$ , cela définit bien un élément de  $\mathcal{S}_n$  (la construction assure la bijectivité) avec exactement  $k$  points fixes : les éléments de  $F$ .

On obtient ainsi toutes les permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $k$  points fixes exactement. Par principe multiplicatif, on en déduit :

$$(X_n = k) = \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

D'où le résultat.

**Remarque.** Il semble *a priori* que  $d_{n-k}$  désigne le nombre de dérangements de  $\llbracket 1, n - k \rrbracket$  et non de  $D$ . Vérifions que  $d_{n-k}$  donne bien le nombre de dérangements de  $D$  (c'est-à-dire des bijections de  $D$  dans lui-même sans point fixe). Soient  $\text{Dér}_{\llbracket 1, n-k \rrbracket}$  l'ensemble des dérangements de  $\llbracket 1, n - k \rrbracket$  et  $\text{Dér}_D$  l'ensemble des dérangements de  $D$ . Comme  $D$  est de cardinal  $n - k$ , il existe une bijection  $f$  de  $\llbracket 1, n - k \rrbracket$  dans  $D$  (c'est même la définition du cardinal d'un ensemble fini). On montre alors que les applications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dér}_{\llbracket 1, n-k \rrbracket} \rightarrow \text{Dér}_D \\ \sigma \mapsto f \circ \sigma \circ f^{-1} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dér}_D \rightarrow \text{Dér}_{\llbracket 1, n-k \rrbracket} \\ \sigma \mapsto f^{-1} \circ \sigma \circ f \end{array} \right.$$

sont correctement définies, c'est-à-dire : si  $\sigma$  est un dérangement de  $\llbracket 1, n - k \rrbracket$ , alors  $f \circ \sigma \circ f^{-1}$  est un dérangement de  $D$  ; la justesse des ensembles de départ et d'arrivée est facile à vérifier, et  $f \circ \sigma \circ f^{-1}$  est bijective en tant que composition d'applications bijectives ; enfin, on vérifie que  $i \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$  est un point fixe de  $\sigma$  si et seulement si  $f(i) \in D$  est un point fixe de  $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ , donc  $\sigma$  n'admet aucun point fixe si et seulement si  $f \circ \sigma \circ f^{-1}$  n'en admet pas : ainsi  $f \circ \sigma \circ f^{-1}$  est bien un dérangement de  $D$  si  $\sigma$  en est un de  $\llbracket 1, n - k \rrbracket$ . De même pour la vérification que la seconde application est bien définie. De plus ces deux applications sont clairement réciproques l'une de l'autre : ce sont donc des bijections, et comme une bijection conserve les cardinaux on a :  $\text{card}(Dér_D) = \text{card}(Dér_{\llbracket 1, n - k \rrbracket}) = d_{n-k}$ . D'où le résultat.

3. Notons  $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$  le produit de Cauchy de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$  (qui est de rayon de convergence  $R \geq 1$ ) avec la série entière exponentielle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  (qui est de rayon de convergence infini). Alors le rayon de convergence  $R_p$  de ce produit de Cauchy est supérieur ou égal à  $\min(R, +\infty) = R \geq 1$ , et pour tout  $x \in ]-1, 1[$  on a :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

avec, par définition d'un produit de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} d_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} \stackrel{(q.2)}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\text{card}(X_n = k)}{\text{card}(\mathcal{S}_n)}.$$

Or  $\mathcal{S}_n$  est muni de la probabilité uniforme  $P_n$ , donc :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \frac{\text{card}(X_n = k)}{\text{card}(\mathcal{S}_n)} = P_n(X_n = k).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n P_n(X_n = k) = P_n(X_n \in \llbracket 0, n \rrbracket),$$

et comme  $X_n$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  (en effet une permutation de  $\mathcal{S}_n$  ne peut pas avoir plus de points fixes que le cardinal de son ensemble de départ  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , c'est-à-dire  $n$ ), on a :

$$P_n(X_n \in \llbracket 0, n \rrbracket) = 1.$$

En principe tout notre raisonnement vaut pour  $n \geq 1$  ; pour  $n = 0$ , on utilise la convention de l'énoncé selon laquelle  $d_0 = 1$ . En résumé, nous avons montré :  $\forall n \in \mathbf{N}, c_n = 1$ , donc :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

d'où le résultat.

Voyons comment en déduire que  $R = 1$  : on sait déjà que  $R \geq 1$ . De plus le produit de Cauchy ci-dessus est égal à  $\sum_{n \geq 0} x^n$ , qui est de rayon de convergence  $R_p = 1$ , et on sait que  $R_p \geq R$ . Donc :

$1 \geq R$ . Ayant montré que  $R$  est supérieur et inférieur à 1, on a donc :  $R = 1$ .

4. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . De la question précédente on déduit :  $(1-x)s(x) = e^{-x}$ . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^n \\ &= d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Mais on a aussi :  $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ . Par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on a donc :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad d_0 = 1.$$

On en déduit, en sommant la première égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^n \left( \frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!},$$

or la somme du membre de gauche est télescopique. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{d_n}{n!} - \frac{d_0}{0!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!},$$

soit donc :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{d_n}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On remarque que cette égalité reste valable pour  $n = 0$ .

**Autre démonstration.** En multipliant la relation de la question précédente par  $e^{-x}$ , on a :

$$s(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right).$$

Faisons le produit de Cauchy des deux sommes du membre de droite. Il est défini sur  $] -1, 1[$  par un raisonnement analogue à celui de la question précédente. Notons-le  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ . Alors :

$$s(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n,$$

mais on a aussi :  $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ . Par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on a donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{d_n}{n!} = u_n,$$

or, par définition d'un produit de Cauchy :  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ , d'où :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!},$$

ce qui démontre le résultat voulu.

5. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On rappelle que  $P_n$  est la probabilité uniforme sur  $\mathcal{S}_n$ . Donc :

$$P_n(X_n = k) = \frac{\text{card}(X_n = k)}{\text{card}(\mathcal{S}_n)} \stackrel{(q.2)}{=} \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{(n-k)!k!} \stackrel{(q.4)}{=} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!},$$

d'où le résultat.

6. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Puisque  $U_i$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , c'est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli. On détermine son paramètre en calculant  $P_n(U_i = 1)$ . Notons  $F_i$  l'ensemble des permutations de  $\mathcal{S}_n$  telles que  $\sigma(i) = i$ . On a :

$$P_n(U_i = 1) = \frac{\text{card}(U_i = 1)}{\text{card}(\mathcal{S}_n)} = \frac{\text{card}(F_i)}{n!}.$$

Or, en reprenant le raisonnement de dénombrement de la question 2 (quand on veut montrer que  $\sigma|_D$  est une permutation de  $D$ ), on montre que  $\sigma \in F_i$  si et seulement si  $\sigma|_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}}$  est une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ , et il y a  $(n-1)!$  tels permutations (là encore, voir la remarque de la question 2 pour avoir une idée de la façon de démontrer qu'il y a autant de permutations de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  que de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ ). Donc :

$$P_n(U_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

donc :  $U_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Le même raisonnement montre que si  $i \neq j$ , alors  $U_i U_j$  est une loi de Bernoulli de paramètre :

$$P_n(U_i U_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

si  $n \geq 2$  (si  $n = 1$  on ne peut de toute façon pas considérer  $i \neq j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ). La clé du raisonnement est de noter que  $U_i U_j(\sigma) = 1$  si et seulement si  $U_i(\sigma) = 1$  et  $U_j(\sigma) = 1$  (car  $U_i$  et  $U_j$  ne prennent que les valeurs 0 et 1), si et seulement si  $\sigma$  fixe  $i$  et  $j$ , si et seulement si  $\sigma|_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}}$  est une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$ . Comme il y a  $(n-2)!$  permutations de cet ensemble, on obtient le calcul ci-dessus. En conclusion :

$$U_i U_j \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right).$$

**Remarque.** Ce calcul permettrait de démontrer que  $U_i$  et  $U_j$  ne sont pas indépendantes si  $i \neq j$ . En effet,  $P_n(U_i = 1, U_j = 1) = P_n(U_i U_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$ , tandis que :

$$P_n(U_i = 1)P_n(U_j = 1) = \frac{1}{n^2} \neq \frac{1}{n(n-1)}.$$

7. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a :

$$X_n = \sum_{i=1}^n U_i.$$

En effet, comme les  $U_i$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^n U_i$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  on a :  $\sum_{i=1}^n U_i(\sigma) = k$ , si et seulement si  $k$  termes de la somme sont égaux à 1, si et seulement si  $\sigma$  admet  $k$  points fixes (puisque, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$U_i(\sigma) = 1$  si et seulement si  $i$  est un point fixe de  $\sigma$ , si et seulement si  $X_n(\sigma) = k$ . Ceci montre bien que  $\sum_{i=1}^n U_i(\sigma) = X_n(\sigma)$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ .

Comme l'espérance est linéaire, on en déduit :

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(U_i) \stackrel{(q.8)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Pour la variance, on écrit :

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n V(U_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(U_i, U_j).$$

Comme  $U_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{n}$ , on a :  $V(U_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . Passons à la covariance de  $U_i$  et  $U_j$  pour  $i \neq j$ . On a :

$$\text{Cov}(U_i, U_j) = E(U_i U_j) - E(U_i) E(U_j) \stackrel{(q.8)}{=} E(U_i U_j) - \frac{1}{n^2},$$

et on a montré dans la question précédente que  $U_i U_j$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{n(n-1)}$ , donc :  $E(U_i U_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ . Donc :  $\text{Cov}(U_i, U_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}$ . Ainsi :

$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + 2 \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1.$$

Pour calculer :  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$ , il suffit de dénombrer les couples  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  vérifiant  $i < j$ . Cela revient à compter le nombre de façons de choisir deux éléments parmi les  $n$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (il suffit alors de décréter que  $i$  est le plus petit des deux et  $j$  le plus grand). On sait qu'il y en a  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Ainsi :

$$V(X_n) = 1 - \frac{1}{n} + 2 \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \frac{n(n-1)}{2} = 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{n-1}{n} = 1.$$

En conclusion :

$$E(X_n) = V(X_n) = 1.$$

8. On a, d'après la question 5 :  $P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$ . Or on sait que pour tout  $x \in \mathbf{R}$  la série

$\sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!}$  converge et que sa somme est  $e^x$ . Pour  $x = -1$ , cela donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Ainsi la variable aléatoire  $Y$  définie dans l'énoncé vérifie :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad P(Y = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

On reconnaît une loi de Poisson :  $Y \sim \mathcal{P}(1)$ .

9. Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$  et  $s \in \mathbf{R}$ . La fonction  $G_{X_n}$  est définie sur  $\mathbf{R}$  car  $X_n$  est à support fini. On a par définition :

$$G_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_n(X_n = k) s^k = \sum_{k=0}^n P_n(X_n = k) s^k.$$

Or  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre 1, donc on sait que l'on a :  $G_Y(s) = e^{s-1}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} |G_{X_n}(s) - G_Y(s)| &= \left| \sum_{k=0}^n P_n(X_n = k) s^k - \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{s^k}{k!} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left( P_n(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right) s^k - e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + e^{-1} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \right|. \end{aligned} \quad (1)$$

Pour montrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s)$ , nous allons montrer que chacun des termes de la majoration ci-dessus devient arbitrairement petit. Commençons par le dernier terme : comme  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!}$  est le reste d'indice  $n$  d'une série convergente (la série exponentielle, qui converge en tout réel), il tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . On en déduit qu'il existe un rang  $N_1 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N_1$ , on ait :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \right| \leq e\varepsilon. \quad (2)$$

Le choix de majorer par  $e\varepsilon$  plutôt que par  $\varepsilon$  est pour avoir une majoration plus simple à la fin du raisonnement, mais majorer par  $\varepsilon$  n'empêche absolument pas de conclure. De même pour les autres majorations « epsilonques » plus bas.

Passons au premier terme. D'après la question précédente :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} k! P_n(X_n = k) = e^{-1}$ , donc il existe un rang  $N_2 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N_2$ , on ait :  $|k! P_n(X_n = k) - e^{-1}| \leq e^{-|s|} \varepsilon$ . Prenons  $n > N_2$  désormais, et écrivons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{N_2} \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + \sum_{k=N_2+1}^n \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{N_2} \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + e^{-|s|} \varepsilon \sum_{k=N_2+1}^n \frac{|s|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{N_2} \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + e^{-|s|} \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|s|^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{N_2} \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Enfin,  $\sum_{k=0}^{N_2} \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!}$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  puisque c'est une somme (avec un nombre fixe et fini de termes) de termes tendant vers 0. Donc il existe  $N_3 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_3$ , on ait :

$\sum_{k=0}^{N_2} \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} \leq \varepsilon$ . En prenant  $n \geq \max(N_2 + 1, N_3)$ , on a alors :

$$\sum_{k=0}^n \left| k! P_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad (3)$$

Posons :  $N = \max(N_1, N_2 + 1, N_3)$ , et  $n \geq N$ . En combinant (1), (2) et (3), on obtient :

$$|G_{X_n}(s) - G_Y(s)| \leq 2\varepsilon + e^{-1}\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N$  on ait :  $|G_{X_n}(s) - G_Y(s)| \leq 3\varepsilon$ . Par définition de la limite (s'il vous ennuie d'avoir une majoration par  $3\varepsilon$  plutôt que  $\varepsilon$ , reprenez tout le raisonnement ci-dessus en remplaçant  $\varepsilon$  par  $\frac{\varepsilon}{3}$ ), on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s),$$

ce qu'il fallait démontrer.

## 2 Convergence en variation totale

10. Comme  $d_{VT}(x, y)$  est une somme de réels positifs, on a :  $d_{VT}(x, y) \geq 0$ . De plus, d'après l'inégalité triangulaire :

$$d_{VT}(x, y) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (|x(k)| + |y(k)|) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |y(k)| \right),$$

et comme une distribution est à valeurs positives, on peut simplifier les valeurs absolues pour obtenir :

$$d_{VT}(x, y) \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) + \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) \right) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1.$$

On a montré :

$$0 \leq d_{VT}(x, y) \leq 1.$$

De plus une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc :

$$d_{VT}(x, y) = 0 \iff \forall k \in \mathbf{N}, |x(k) - y(k)| = 0 \iff \forall k \in \mathbf{N}, x(k) = y(k) \iff x = y.$$

La relation  $d_{VT}(y, x) = d_{VT}(x, y)$  est évidente, étant donné que  $|x(k) - y(k)| = |-(x(k) - y(k))| = |y(k) - x(k)|$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ . Enfin, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d_{VT}(x, z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - z(k)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |(x(k) - y(k)) + (y(k) - z(k))| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (|x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |y(k) - z(k)| \\ &= d_{VT}(x, y) + d_{VT}(y, z), \end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer les quatre propriétés demandées.

**Remarque.** On a implicitement démontré que  $d_{VT}$  est une distance sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}$ .

11. On a :

$$\begin{aligned} d_{VT}(p_X, p_Y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathrm{P}(X = k) - \mathrm{P}(Y = k)| \\ &= \frac{1}{2} (|\mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(Y = 0)| + |\mathrm{P}(X = 1) - \mathrm{P}(Y = 1)|) \\ &= \frac{1}{2} (|(1 - \lambda) - (1 - \mu)| + |\lambda - \mu|) \\ &= |\lambda - \mu|. \end{aligned}$$

12. On a :

$$\begin{aligned} d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) &= \frac{1}{2} \left( |\mathbb{P}(X=0) - \pi_\lambda(0)| + |\mathbb{P}(X=1) - \pi_\lambda(1)| + \sum_{k=2}^{+\infty} |-\pi_\lambda(k)| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( |1 - \lambda - e^{-\lambda}| + |\lambda - \lambda e^{-\lambda}| + e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( |1 - \lambda - e^{-\lambda}| + \lambda |1 - e^{-\lambda}| + e^{-\lambda} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 - \lambda \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( |1 - \lambda - e^{-\lambda}| + \lambda |1 - e^{-\lambda}| + e^{-\lambda} (e^\lambda - 1 - \lambda) \right) \end{aligned}$$

Or  $\lambda > 0$ , donc :  $1 - e^{-\lambda} > 0$ . De plus on sait que l'on a :  $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \geq 1 + x$ . Appliqué à  $x = -\lambda$ , cela donne :  $0 \geq 1 - \lambda - e^{-\lambda}$ . Donc :

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \frac{1}{2} \left( - (1 - \lambda - e^{-\lambda}) + \lambda (1 - e^{-\lambda}) + e^{-\lambda} (e^\lambda - 1 - \lambda) \right) = \lambda (1 - e^{-\lambda}),$$

ce qu'il fallait démontrer. En réutilisant l'inégalité  $e^{-\lambda} \geq 1 - \lambda$ , on obtient :

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda^2.$$

13. Soit  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ . On a :

$$2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathbb{P}_n(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \sum_{k=0}^n \left| \mathbb{P}_n(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| -\frac{e^{-1}}{k!} \right|.$$

Or, d'après la question 5 d'une part, et l'identité  $e^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$  d'autre part, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on a :

$$\mathbb{P}_n(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = -\frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!},$$

donc :

$$2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!},$$

ce qu'il fallait démontrer.

14. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Pour tout entier  $k \geq n + 1$ , on a :

$$k! = \left( \prod_{\ell=n+2}^k \ell \right) \cdot (n+1)! \geq \left( \prod_{\ell=n+2}^k (n+2) \right) \cdot (n+1)! = (n+2)^{k-(n+1)} (n+1)!,$$

donc :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} \stackrel{(\ell=k-(n+1))}{=} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^\ell},$$

d'où la majoration désirée. On reconnaît là une somme géométrique de raison  $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} < 1$ , donc :

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Mais comme  $r_n$  est une somme de réels positifs, on peut aussi la minorer par son premier terme. Ainsi on a :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement sont clairement équivalentes asymptotiquement à  $\frac{1}{(n+1)!}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc, par le théorème des gendarmes :

$$r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}.$$

15. Soit  $n \in \mathbf{N}$  au voisinage de  $+\infty$ . On reprend l'identité démontrée dans la question 13. Intéressons-nous à la première somme du membre de droite. Comme  $\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$  est le reste d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées (en effet  $\left(\frac{1}{i!}\right)_{i \geq 0}$  est décroissante, positive et converge vers 0), il est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!},$$

donc :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}.$$

Or, par la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^k 1^{n+1-k} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1},$$

donc :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 2 \cdot \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

Ainsi :

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + \frac{e^{-1}}{2} r_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{2^n}{(n+1)!} \right) + \frac{e^{-1}}{2} r_n.$$

Or :  $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$ , et on a :  $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{2^n}{(n+1)!}$ , donc :  $r_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{2^n}{(n+1)!} \right)$ . On peut conclure :

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{2^n}{(n+1)!} \right).$$

**Remarque.** En particulier, par croissances comparées :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = 0$ . Comme  $d_{VT}$  définit une distance sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}$  (on l'a fait remarquer à la fin de la question 10), ceci permet de formaliser l'idée que  $(p_{X_n})_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\pi_1$  (à ceci près que le programme de classes préparatoires ne parle de convergence que dans les espaces vectoriels normés).

### 3 Autres estimations de distances en variation totale

16. Il est clair que  $x * y$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$  (en effet  $x$  et  $y$  le sont, donc pour tout  $k$  entier naturel le nombre  $(x * y)(k)$  est une somme de réels positifs). Pour que ce soit une distribution sur  $\mathbf{N}$ , il suffit donc de démontrer :  $\sum_{k=0}^{+\infty} (x * y)(k) = 1$ . Or on reconnaît un produit de sommes de réels positifs :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x * y)(k) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{i+j=k} x(i)y(j) = \left( \sum_{k \in \mathbf{N}} x(k) \right) \left( \sum_{j \in \mathbf{N}} y(j) \right) = 1 \times 1 = 1.$$

Ainsi  $x * y$  est bien une distribution sur  $\mathbf{N}$ .

17. Soit  $k \in \mathbf{N}$ . Comme  $X$  et  $Y$  sont à valeurs positives et entières, on a :

$$(X + Y = k) = \bigcup_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} (X = i) \cap (Y = j).$$

Par  $\sigma$ -additivité et indépendance des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , on en déduit :

$$P(X + Y = k) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} P(X = i) P(Y = j),$$

c'est-à-dire :

$$p_{X+Y}(k) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} p_X(i)p_Y(j) = p_X * p_Y(k),$$

d'où :  $p_{X+Y} = p_X * p_Y$ , ce qu'il fallait démontrer.

18. Soit  $k \in \mathbf{N}$ . D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} |(x * y)(k) - (u * v)(k)| &= \left| \sum_{i+j=k} (x(i)y(j) - u(i)v(j)) \right| \\ &\leq \sum_{i+j=k} |x(i)y(j) - u(i)v(j)| \\ &= \sum_{i+j=k} |(x(i) - u(i) + u(i))y(j) - u(i)v(j)| \\ &= \sum_{i+j=k} |(x(i) - u(i))y(j) - u(i)(v(j) - y(j))| \\ &\leq \sum_{i+j=k} (|(x(i) - u(i))y(j)| + |u(i)(v(j) - y(j))|) \\ &= \sum_{i+j=k} |(x(i) - u(i))y(j)| + \sum_{i+j=k} |u(i)(v(j) - y(j))|, \end{aligned}$$

et par multiplicativité de la valeur absolue (et positivité de  $y$  et  $u$ ), on peut conclure :

$$|(x * y)(k) - (u * v)(k)| \leq \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)|.$$

19. On a :

$$2d_{VT}(x*y, u*v) = \sum_{k=0}^{+\infty} |(x*y)(k) - (u*v)(k)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)| \right).$$

On reconnaît encore des produits de sommes de réels positifs :

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| = \left( \sum_{j \in \mathbf{N}} y(j) \right) \left( \sum_{i \in \mathbf{N}} |x(i) - u(i)| \right) = 1 \times 2d_{VT}(x, u),$$

et de même :  $\sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)| = 2d_{VT}(y, v)$ . Donc :

$$2d_{VT}(x * y, u * v) \leq 2d_{VT}(x, u) + 2d_{VT}(y, v),$$

d'où le résultat après division par 2.

20. Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . Nous allons montrer pour tout  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  :

$P_n$  : « pour toute variable aléatoire  $U$  suivant la loi  $\mathcal{B}(n, \lambda)$ , on a :  $d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leq n\lambda^2$  »,

par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , le résultat découle de la question 12. D'où  $P_1$ .

Démontrons l'hérédité de la proposition. Soit  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ . Supposons  $P_n$ . Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ , et soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{B}(n+1, \lambda)$ . Soient  $U_1, U_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois  $\mathcal{B}(n, \lambda)$  et  $\mathcal{B}(1, \lambda) = \mathcal{B}(\lambda)$ . Comme elles sont indépendantes, on sait que l'on a :  $U_1 + U_2 \sim \mathcal{B}(n+1, \lambda)$ . Autrement dit,  $U_1 + U_2$  et  $U$  ont même loi, donc :  $p_U = p_{U_1+U_2}$ , et donc par la question 17 :

$$p_U = p_{U_1} * p_{U_2}.$$

De même, soient  $V_1, V_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois  $\mathcal{P}(n\lambda)$  et  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Comme elles sont indépendantes, on sait que l'on a :  $V_1 + V_2 \sim \mathcal{P}((n+1)\lambda)$ , donc :  $\pi_{(n+1)\lambda} = p_{V_1+V_2} = p_{V_1} * p_{V_2} = \pi_{n\lambda} * \pi_\lambda$ . On a donc, par la question précédente :

$$d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) = d_{VT}(p_{U_1} * p_{U_2}, \pi_{n\lambda} * \pi_\lambda) \leq d_{VT}(p_{U_1}, \pi_{n\lambda}) + d_{VT}(p_{U_2}, \pi_\lambda).$$

Comme  $U_1$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, \lambda)$ , l'hypothèse de récurrence  $P_n$  permet d'écrire :  $d_{VT}(p_{U_1}, \pi_{n\lambda}) \leq n\lambda^2$ . De plus  $U_2$  suit la loi  $\mathcal{B}(\lambda)$ , donc d'après la question 12 on a :  $d_{VT}(p_{U_2}, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$ . D'où :

$$d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leq n\lambda^2 + \lambda^2 = (n+1)\lambda^2,$$

ce qui démontre  $P_{n+1}$ . Ainsi  $P_n$  implique  $P_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  et la proposition est effectivement héréditaire.

Par principe de récurrence, on a montré que pour tout entier  $n \geq 1$  et toute variable aléatoire  $U$  suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a :

$$d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leq n\lambda^2.$$

21. Soit  $k \in \mathbf{N}$  et soit  $n$  au voisinage de  $+\infty$  (vérifiant en particulier :  $n > \lfloor \alpha \rfloor$ , ce qui assure que  $\frac{\alpha}{n} \in ]0, 1[$ ). Par la question précédente, on a :

$$0 \leq |\mathbb{P}(B_n = k) - \pi_\alpha(k)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(B_n = k) - \pi_\alpha(k)| = 2d_{VT}(p_{B_n}, \pi_{\frac{\alpha}{n}}) \leq 2n \left( \frac{\alpha}{n} \right)^2 = \frac{2\alpha^2}{n}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n = k) = \pi_\alpha(k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}.$$

22. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  au voisinage de  $+\infty$  (de sorte que  $n > \lfloor \alpha \rfloor$  et  $n > \lfloor \beta \rfloor$ ), notons  $B_n$  et  $C_n$  des variables aléatoires suivant des lois binomiales, respectivement de paramètres  $\left(n, \frac{\alpha}{n}\right)$  et  $\left(n, \frac{\beta}{n}\right)$ . D'après la question 10,  $d_{VT}$  vérifie l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire :

$$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq d_{VT}(\pi_\alpha, p_{B_n}) + d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n}) + d_{VT}(p_{C_n}, \pi_\beta).$$

D'après la question 20, on a donc :

$$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n} + d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n}).$$

Pour majorer  $d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n})$ , on raisonne par récurrence, en suivant de près la stratégie de la question 20. Montrons que pour tout  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ , on a :

$P_n$  : « Pour tout  $(\lambda, \mu) \in ]0, 1[^2$ , et pour toutes variables aléatoires  $X$  et  $Y$  suivant respectivement les lois  $\mathcal{B}(n, \lambda)$  et  $\mathcal{B}(n, \mu)$ , on a :  $d_{VT}(p_X, p_Y) \leq n|\lambda - \mu|$  »,

par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , le résultat découle immédiatement de la question 11. D'où  $P_1$ .

Démontrons l'hérédité de la proposition. Soit  $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ . Supposons  $P_n$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in ]0, 1[^2$ , et soient  $X, Y$  deux variables aléatoires suivant respectivement les lois  $\mathcal{B}(n+1, \lambda)$  et  $\mathcal{B}(n+1, \mu)$ . Soient  $X_1, X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois  $\mathcal{B}(n, \lambda)$  et  $\mathcal{B}(\lambda)$ , et  $Y_1, Y_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois  $\mathcal{B}(n, \mu)$  et  $\mathcal{B}(\mu)$ . En reprenant le raisonnement effectué dans l'hérédité de la récurrence de la question 20, on a :  $p_X = p_{X_1} * p_{X_2}$ , et :  $p_Y = p_{Y_1} * p_{Y_2}$ . Donc par la question 17, on a :

$$d_{VT}(p_X, p_Y) \leq d_{VT}(p_{X_1}, p_{Y_1}) + d_{VT}(p_{X_2}, p_{Y_2}).$$

Comme  $X_1$  et  $Y_1$  suivent des lois binomiales de paramètres  $(n, \lambda)$  et  $(n, \mu)$  respectivement, d'après l'hypothèse de récurrence  $P_n$  on a :  $d_{VT}(p_{X_1}, p_{Y_1}) \leq n|\lambda - \mu|$ . Par la question 11, on a :  $d_{VT}(p_{X_2}, p_{Y_2}) \leq |\lambda - \mu|$ . Donc :

$$d_{VT}(p_X, p_Y) \leq n|\lambda - \mu| + |\lambda - \mu| = (n+1)|\lambda - \mu|,$$

ce qui montre que  $P_n$  implique  $P_{n+1}$ , d'où l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a donc  $P_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ . En particulier, si l'on revient au contexte originel de notre question, si on applique cette proposition avec  $B_n$  et  $C_n$ , pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ , on a :  $d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n}) \leq n \left| \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} \right| = |\alpha - \beta|$ , donc finalement :

$$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n} + |\alpha - \beta|.$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ , cela donne :

$$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\alpha - \beta|,$$

d'où le résultat.