Concours Centrale-Supélec 2024

Épreuve de mathématiques II, MP & MPI, quatre heures

(corrigé)

I - Étude de l'opérateur différence finie

Q 1. Vérification triviale.

Q 2. Soit $P \in K[X]$. Si $P = 0$, alors $\Delta(P) = 0$ et donc $\deg(\Delta(P)) = -\infty$. Si P est non nul, on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d = \deg(P)$ (et donc $a_d \neq 0$), puis par la formule du binôme de Newton :

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \Delta(X^k) = \sum_{k=0}^{d} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

Si $d = 0$, alors cette somme est nulle puisque indexée par un ensemble vide, donc $\Delta(P) = 0$ et $\deg(\Delta(P)) = -\infty$. Sinon, le terme de plus haut degré de cette somme est obtenu pour $k = d$ et $j = d-1$: c'est $a_d \binom{d}{d-1} X^{d-1}$. Tous les autres termes sont de degré strictement inférieur. On en déduit :

$$\deg(\Delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1.$$

En conclusion :

$$\forall P \in K[X], \quad \deg(\Delta(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1. \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leqslant 0. \end{cases}$$

Q 3. Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La question précédente assure que si $\deg(P) \leqslant d$, alors $\deg(\Delta(P)) \leqslant d$ également, donc $K_d[X]$ est stable par Δ : d'où le résultat.

Q 4. Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On peut obtenir le noyau de Δ_d par des moyens variés. Nous proposons trois démonstrations. Il est trivial que les polynômes constants vérifient $P(X+1) - P(X) = 0$, donc : $K_0[X] \subseteq \ker(\Delta_d)$, et seule l'inclusion réciproque est à démontrer.

Première démonstration que $\ker(\Delta_d) = K_0[X]$**.** Si $P \in \ker(\Delta_d)$, alors $\Delta(P) = 0$, et donc : $\deg(\Delta(P)) = -\infty$. Par la question **Q 2** on a donc : $\deg(P) \leqslant 0$, d'où : $P \in K_0[X]$, ce qui montre bien l'inclusion de $\ker(\Delta_d)$ dans $K_0[X]$.

Deuxième démonstration que $\ker(\Delta_d) = K_0[X]$**.** Si $P \in \ker(\Delta_d)$, alors on a en particulier : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k+1) - P(k) = 0$ (notons que $\mathbb{N} \subseteq K$ puisque $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). En sommant cette égalité de $k = 0$ à $k = n-1$ et en utilisant le lien suite-série, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) - P(0) = 0$. Ainsi le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines (tous les entiers naturels), donc c'est le polynôme nul. On a : $P = P(0) \in K_0[X]$. D'où l'inclusion de $\ker(\Delta_d)$ dans $K_0[X]$.

Troisième démonstration que $\ker(\Delta_d) = K_0[X]$**.** Si $P \in \ker(\Delta_d)$, alors l'application polynomiale associée, définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto P(x)$, est 1-périodique et continue : elle est nécessairement bornée (exercice classique : on utilise le théorème des bornes atteintes sur $[0,1]$ pour produire des bornes sur ce segment, puis on utilise la périodicité pour montrer que ces bornes restent valables sur $\mathbb{R}$). Or une application polynomiale de degré supérieur ou égal à 1 tend vers l'infini en l'infini (éventuellement considérer le module, si $K = \mathbb{C}$) et n'est donc pas bornée. On en déduit : $\deg(P) \leqslant 0$, d'où l'inclusion de $\ker(\Delta_d)$ dans $K_0[X]$.

Peu importe la voie choisie, on a montré : $\ker(\Delta_d) = K_0[X]$.

Passons à la détermination de l'image. Par la question **Q 2**, on a : $\mathrm{im}(\Delta_d) \subseteq K_{d-1}[X]$, et par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{im}(\Delta_d)) = \dim(K_d[X]) - \dim(\ker(\Delta_d)) = (d+1) - 1 = d = \dim(K_{d-1}[X]).$$

Ayant une inclusion et égalité des dimensions, il y a égalité. En conclusion :

$$\ker(\Delta_d) = K_0[X], \quad \mathrm{im}(\Delta_d) = K_{d-1}[X].$$

Q 5. Les arguments invoqués pour déterminer le noyau, ci-dessus, restent valables en remplaçant $K_d[X]$ par $K[X]$. Donc : $\ker(\Delta) = K_0[X]$.

Passons à l'image. On va montrer qu'elle est égale à $K[X]$, c'est-à-dire que Δ est surjective. Soit $P \in K[X]$. Le polynôme nul a bien sûr 0 comme antécédent par Δ et il ne coûte rien de considérer uniquement le cas $P \neq 0$. Notons d son degré, de sorte que : $P \in K_d[X]$. Par la question précédente on a donc : $P \in \mathrm{im}(\Delta_{d+1})$, donc il existe $Q \in K_{d+1}[X]$ tel que : $\Delta(Q) = P$, ce qu'on voulait démontrer.

En conclusion :

$$\ker(\Delta) = K_0[X], \quad \mathrm{im}(\Delta) = K[X].$$

Q 6. La question posée revient à résoudre l'équation $\Delta(P) = X$ d'inconnue $P \in K[X]$. C'est une équation affine. On sait que l'ensemble de ses solutions s'obtient donc à l'aide de $\ker(\Delta)$ et d'une solution particulière, que nous allons déterminer. Les questions précédentes assurent qu'on peut en trouver une dans $K_2[X]$ (de toute façon l'énoncé nous incite à nous placer dans cet espace vectoriel). Posons donc : $P_2 = aX^2 + bX + c$, avec $(a, b, c) \in K^3$. On a :

$$\Delta(P_2) = X \iff 2aX + a + b = X \iff (a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Un polynôme P_2 qui convient est donc : $P_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}$. D'après la discussion ci-dessus :

$$\forall P \in K[X], \quad \left(\Delta(P) = X \iff P \in P_2 + \ker(\Delta) \iff \exists c \in \mathbb{R},\ P = \frac{X^2 - X + c}{2}\right).$$

Comme $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est un corps infini, il y a identification entre polynômes et applications polynomiales associées, ce qui conclut.

Q 7. La question **Q 2** permet facilement de constater que la matrice représentative de Δ_d relativement à la base canonique de $K_d[X]$ est triangulaire supérieure stricte (on pourrait même expliciter tous ses coefficients si nécessaire), ce qui permet immédiatement de calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_{\Delta_d} = X^d.$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, X^d est un polynôme annulateur de Δ_d.

Il en résulte que 0 est son unique valeur propre, or par la question **Q 4** :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta_d)} \dim\left(\ker\left(\Delta_d - \lambda \mathrm{Id}_{K_d[X]}\right)\right) = \dim\left(\ker\left(\Delta_d\right)\right) = \dim(K_0[X]) = 1 < \dim(K_d[X])$$

où l'inégalité stricte découle de l'hypothèse que d est non nul. Par le critère de diagonalisation, l'endomorphisme Δ_d n'est pas diagonalisable.

II - Fonctions entières

II.A – *Généralités*

Q 8. C'est du cours sur les sommes et produits de séries entières. Il suffit de rappeler que si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ vérifie : $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. De même pour le rayon de convergence du produit de Cauchy.

Ici $R_a = R_b = +\infty$ (si ces deux séries entières sont celles ayant pour sommes respectives f et g), donc $R = +\infty$, d'où le résultat.

Q 9. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On aimerait écrire, sous réserve d'existence des objets en jeu :

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\omega(t)^{n-k}\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n\omega(t)^{n-k}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)}\mathrm{d}t.$$

Il suffirait alors d'intégrer ces exponentielles (chose aisée) pour en déduire le résultat voulu. Mais il faut justifier l'interversion de symboles $(*)$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1], \quad g_n(t) = a_n\omega(t)^{n-k}.$$

Alors :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application g_n est clairement continue sur $[0,1]$, par composition et continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a : $|g_n(t)| = |a_n|$; on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|g_n\|_\infty = |a_n|,$$

or la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence infini, donc en particulier elle converge absolument pour $z=1$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} \|g_n\|_\infty = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|$ converge ; on a donc démontré que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$ converge, et d'autre part :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t.$$

Or, d'après les calculs (en sens inverse) effectués au début de la question :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\mathrm{d}t,$$

et d'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = a_n \int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)}\mathrm{d}t = \begin{cases} a_n \left[\frac{e^{2i\pi t(n-k)}}{2i\pi(n-k)}\right]_0^1 = 0 & \text{si } n \neq k, \\ a_k \int_0^1 \mathrm{d}t = a_k & \text{si } n = k, \end{cases}$$

étant donné que : $e^{2i\pi(n-k)} - 1 = 0$ (pour le cas $n \neq k$). Donc, si $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g_k(t)\mathrm{d}t + \sum_{\substack{n=0\\n\neq k}}^{+\infty} \underbrace{\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t}_{=0} = a_k.$$

Si $k \notin \mathbb{N}$, alors le cas $n = k$ ne se produit pas et cette somme est nulle. D'où le résultat :

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\mathrm{d}t = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } k \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarque. C'est une variante de la formule intégrale de Cauchy.

II.B – *Une intégrale*

Q 10. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Nous devons justifier que l'intégrale I_p converge. Les applications $t \mapsto \omega(t)^{p+1}$ et $t \mapsto e^{\omega(t)} - 1$ sont évidemment continues sur $[0,1]$. De plus, la seconde ne s'annule pas, puisque l'exponentielle ne vaut 1 qu'en les multiplies entiers de $2i\pi$, ce que n'est jamais $\omega(t)$ puisque son module $|\omega(t)| = 1$ n'est pas un multiple entier de 2π.

Ainsi $t \mapsto \dfrac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur le SEGMENT $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas : son intégrale sur $[0,1]$ existe, d'où le résultat.

Q 11. On sait que l'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On a pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$:

$$e^{\zeta} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} = \zeta\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+1)!}\right) = \zeta\left(1 + \zeta\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^{n-1}}{(n+1)!}\right),$$

d'où l'existence de β en posant $\beta : \zeta \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+2)!}$, qui est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ puisque son développement est essentiellement celui de l'exponentielle. Pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$ on a, comme $|\zeta| = 1$:

$$|\beta(\zeta)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+2)!}\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^{n+2}}{(n+2)!}\right| = \left|e^{\zeta} - 1 - \zeta\right|$$

et par l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $t \mapsto e^{t\zeta}$ (avec $\zeta \in \mathbb{U}$ fixé) entre 0 et 1, on a :

$$\left|e^{\zeta} - 1 - \zeta - \frac{\zeta^2}{2}\right| \leqslant \frac{1}{3!}\sup_{t\in[0,1]}\left|\zeta^3 e^{t\zeta}\right| = \frac{1}{6}\sup_{t\in[0,1]} e^{t\mathrm{Re}(\zeta)} = \frac{e^{\mathrm{Re}(\zeta)}}{6} \leqslant \frac{e}{6},$$

donc par l'inégalité triangulaire :

$$\left|e^{\zeta} - 1 - \zeta\right| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{e}{6}.$$

On en déduit qu'en posant : $C = \frac{1}{2} + \frac{e}{6} \approx 0,95$ (la calculatrice était autorisée), on a l'existence de $C \in]0,1[$ tel que :

$$\forall \zeta \in \mathbb{U}, \quad |\beta(\zeta)| \leqslant C,$$

d'où le résultat.

Q 12. Soient $\zeta \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On a par la question précédente :

$$\frac{\zeta^p}{e^{\zeta} - 1} = \zeta^{p-1} \cdot \frac{1}{1 - (-\zeta\beta(\zeta))}.$$

Comme : $|-\zeta\beta(\zeta)| = |\beta(\zeta)| \leqslant C < 1$, on peut développer en série géométrique cette expression :

$$\frac{\zeta^p}{e^{\zeta} - 1} = \zeta^{p-1} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty}(-\zeta\beta(\zeta))^j = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\zeta^{j+p-1}\beta(\zeta)^j,$$

d'où le résultat.

Q 13. On aimerait écrire, sous réserve d'existence des objets en jeu :

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \sum_{j=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^j\omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j\mathrm{d}t,$$

et achever ce calcul grâce à la question **Q 9**. Justifions l'interversion $(*)$. Posons :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1], \quad f_j(t) = (-1)^j\omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j.$$

Alors :

— pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'application f_j est continue sur $[0,1]$ par produit, composition et continuité des fonctions développables en série entière sur leur disque ouvert de convergence (donc $\mathbb{C}$ ici, pour β) ;

— pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a :

$$|f_j(t)| = |\omega(t)|^{j+p}|\beta(\omega(t))|^j \leqslant C^j,$$

et donc, par convergence des séries géométriques de raison strictement inférieure à 1 en module :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|f_j\|_\infty \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} C^j < +\infty,$$

ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{j\geqslant 0} f_j$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,1]$.

Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a donc d'une part la convergence de la série $\sum_{j\geqslant 0} \int_0^1 f_j$, et d'autre part :

$$\int_0^1 \sum_{j=0}^{+\infty} f_j(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_0^1 f_j(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, par les calculs plus haut :

$$I_p = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \int_0^1 \omega(t)^{-(-j-p)}\beta(\omega(t))^j\mathrm{d}t.$$

Or β est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, donc par produit il en est de même de β^j pour tout $j \in \mathbb{N}$. Comme $-j-p \notin \mathbb{N}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ si $p \geqslant 1$, par la question **Q 9** l'intégrale $\int_0^1 \omega(t)^{-(-j-p)}\beta(\omega(t))^j\mathrm{d}t$ est nulle. En revanche, si $p = 0$, alors pour $j = 0$ on a : $-j-p = 0 \in \mathbb{N}$, ce qui fournit une intégrale non nulle égale à :

$$\int_0^1 \mathrm{d}t = 1,$$

tandis que si $j \geqslant 1$ alors $-j-p = -j$ est strictement négatif et l'intégrale $\int_0^1 \omega(t)^{-(-j-p)}\beta(\omega(t))^j\mathrm{d}t$ est encore nulle. Donc, en conclusion :

$$I_0 = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \times 0 = 1,$$

et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad I_p = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \times 0 = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

III - Polynômes de Bernoulli

III.A – *Lien avec l'équation* (E_h)

Q 14. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. On utilise le développement en série entière de l'exponentielle au numérateur, en isolant les $n+1$ premiers termes (la linéarité de l'intégrale est alors utilisable). On obtient :

$$\begin{aligned}
B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{1}{(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z\omega(t))^k}{k!} \mathrm{d}t \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \mathrm{d}t + n! \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \mathrm{d}t \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} + n! \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Intervertissons somme et intégrale, afin de reconnaître les intégrales I_{k-n} avec $k > n$. La question **Q 13** permettra alors de conclure. Posons :

$$\forall k \geqslant n+1,\ \forall t \in [0,1], \quad h_k(t) = \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1}.$$

Alors :

- pour tout entier $k \geqslant n+1$, l'application h_k est continue sur $[0,1]$ par les arguments déjà invoqués à la question **Q 10** ;
- la continuité de $t \mapsto \dfrac{\omega(t)}{e^{\omega(t)}-1}$ sur le compact $\mathbb{U}$ (c'est la sphère unité euclidienne de $\mathbb{C}$ qui est de dimension finie) assure l'existence d'une constante $M \geqslant 0$ majorant son module, de sorte que pour tout entier $k \geqslant n+1$ et tout $t \in [0,1]$, on ait :

$$|h_k(t)| = \frac{|z|^k}{k!} \cdot \left| \frac{\omega(t)}{e^{\omega(t)}-1} \right| \cdot |\omega(t)|^{k-n} \leqslant \frac{|z|^k}{k!} M,$$

  et donc, par convergence (absolue) de la série exponentielle sur $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|h_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} M \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} M = e^{|z|} M < +\infty,$$

  ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant n+1} h_k$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,1]$.

Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a donc la convergence de la série $\sum_{k \geqslant n+1} \int_0^1 h_k$, et :

$$\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 h_k(t) \mathrm{d}t,$$

ce qui permet d'achever le calcul de $B_n(z)$ amorcé plus haut :

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} + n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \mathrm{d}t = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} + n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}.$$

Pour tout entier $k \geqslant n+1$, on a : $k - n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc par la question précédente : $I_{k-n} = 0$. Cela permet de simplifier cette dernière somme et de conclure :

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}.$$

Ceci vaut pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi le polynôme $B_n - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} I_{k-n}$ admet une infinité de racines, donc il est nul, et :

$$B_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} I_{k-n}.$$

Comme le coefficient en facteur de X^n est : $I_0 = 1$ (question **Q 13**), on a : $\deg(B_n) = n$, et B_n est unitaire et de degré n.

Q 15. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On utilise la question précédente. On a :

$$B_n' = n!\sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} I_{k-n} = n!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} I_{k+1-n} = n \cdot (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} I_{k-(n-1)} = nB_{n-1},$$

d'où le résultat.

Autre démonstration. On peut aussi utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour démontrer que la restriction de B_n à $[0,1]$ (par exemple) est de classe C^1. L'hypothèse de domination ne pose pas la moindre difficulté, *via* la majoration $\left|e^{z\omega(t)}\right| \leqslant e^{|z|\cdot|\omega(t)|} \leqslant e$. Les autres hypothèses de régularité sont trivialement vérifiées. On a alors :

$$\forall z \in [0,1], \quad B_n'(z) = n!\int_0^1 \frac{\omega(t)e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}}\mathrm{d}t = n \cdot (n-1)!\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-2}}\mathrm{d}t = nB_{n-1}.$$

Le polynôme $B_n' - nB_{n-1}$ ayant une infinité de racines (tous les réels entre 0 et 1), c'est le polynôme nul, d'où : $B_n' = nB_{n-1}$.

Q 16. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n!\int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)} - e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}}\mathrm{d}t = n!\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}(e^{\omega(t)}-1)}{(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}}\mathrm{d}t = n!\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{\omega(t)^{n-1}}\mathrm{d}t.$$

La question **Q 9**, appliquée à $f : w \mapsto e^{zw} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} w^n$, permet de calculer cette intégrale et d'obtenir :

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n!\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = nz^{n-1}.$$

Remarque. On déduit immédiatement de cette relation, en faisant apparaître une somme télescopique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^\alpha = \frac{B_{\alpha+1}(n+1) - B_{\alpha+1}(0)}{n+1}.$$

Ainsi les polynômes de Bernoulli permettent de calculer les sommes de puissances... Cependant la définition intégrale n'est pas la plus commode à cette fin. On préférera par exemple les relations de la question **Q 18**, plus loin, pour les calculer par récurrence.

Q 17. L'identité de la question précédente montre que si h est l'application $z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $P = \frac{1}{k+1}B_{k+1}$ est une application polynomiale vérifiant (E_h). Par le principe de superposition (qui s'applique puisque l'équation (E_h) est affine), si $h : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ est une application polynomiale quelconque, alors :

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}$$

est solution de (E_h).

III.B – *Unicité*

Q 18. On a : $B_0 = 0! \cdot \dfrac{X^0}{0!} I_0 = 1$, et $B_n' = nB_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ d'après la question **Q 15**. Enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \int_0^1 B_{n+1}'(t)\mathrm{d}t = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} \overset{(\mathbf{Q\,16})}{=} 0.$$

Ainsi $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien les trois identités de l'énoncé. Passons à l'unicité.

Pour éviter les confusions, nous noterons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, au lieu de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de polynômes dont nous montrons l'unicité (puisque nous allons la construire par récurrence, le procédé de construction donnant l'unicité ; il serait confus de « construire » B_n puisque ce polynôme est déjà défini dans l'énoncé).

On pourrait obtenir le résultat en construisant les P_n « à la main », par récurrence (dans l'idée : si $P_0, \ldots, P_{n-1}$ sont construits de manière unique, alors $P_n = n \displaystyle\int_0^X P_{n-1}(t)\mathrm{d}t + c$, et on détermine c avec la relation $\displaystyle\int_0^1 P_n = 0$, ce qui fournit un seul polynôme qui convient). Nous proposons une démonstration plus conceptuelle, qui dit la même chose mais plus élégamment, peut-être.

Notons δ l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{R}[X]$, dont le noyau est bien connu et égal à $\mathbb{R}_0[X]$. La forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ est non nulle et le polynôme constant égal à 1 n'est pas dans son noyau, donc :

$$\mathbb{R}[X] = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(1) = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}_0[X] = \ker(\varphi) \oplus \ker(\delta).$$

Par le théorème du rang géométrique, δ induit par restriction un isomorphisme de $\ker(\varphi)$ dans $\mathrm{im}(\delta) = \mathbb{R}[X]$ (tout polynôme admet une primitive, qui est aussi un polynôme). Le caractère bijectif peut se réécrire :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}[X],\quad P' = Q,\ \text{et} :\ \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0.$$

En posant $P_0 = 1$ (première identité de l'énoncé) et en raisonnant par récurrence (à l'étape n, on prend $Q = nP_{n-1}$), on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists! P_n \in \mathbb{R}[X],\quad P_n' = nP_{n-1},\ \text{et} :\ \int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

D'où le résultat : cela définit une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les trois identités de l'énoncé (cela aurait d'ailleurs démontré l'existence, si les polynômes B_n n'avaient pas été étudiés en amont).

Remarque. Ces trois relations permettent d'expliciter par récurrence la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on calcule B_{n+1} en intégrant $(n+1)B_n$, l'identité $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$ permettant de déterminer la constante d'intégration. Par exemple :

$$B_1 = X - \frac{1}{2},\quad B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

Par la question **Q 17**, le polynôme $\dfrac{1}{2}B_2 = \dfrac{X^2 - X + 1/6}{2}$ est solution de (E_h) lorsque h est l'application $x \mapsto x$: c'est cohérent avec notre résolution de la question **Q 6**.

Q 19. Pour montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = B_n$, il suffit de montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions de la question précédente.

Il est immédiat que $H_0 = 1$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad H_n' = (-1)^{n+1} B_n'(1-X) = (-1)^{n+1} n B_{n-1}(1-X) = n(-1)^{n-1} B_{n-1}(1-X) = nH_{n-1},$$

et enfin, par le changement de variable $u = 1 - x$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \int_0^1 H_n(t)\mathrm{d}t = -\int_1^0 H_n(1-u)\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\mathrm{d}u = 0.$$

Ainsi la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions de la question précédente. Or $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite à les vérifier, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = B_n$. D'où le résultat.

III.C – *Une application analytique*

Q 20. L'application $(x,t) \mapsto e^{tx}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ par composition :

- de $(x,t) \mapsto tx$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale, et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- de l'exponentielle qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour obtenir la classe C^∞ de u sur $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de justifier celle de ψ sur $\mathbb{R}$ (celle de l'application $(x,t) \mapsto \psi(x)$ en découle alors par composition avec l'application polynomiale $(x,t) \mapsto x$). Or on vérifie que l'on a, en reprenant le raisonnement de la question **Q 11** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\psi(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

donc $\frac{1}{\psi}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction développable en série entière. L'inverse d'une fonction de classe C^∞ (qui ne s'annule pas) l'est encore, donc ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $(x,t) \mapsto \psi(x)$ l'est sur $\mathbb{R}^2$.

En tant que produit de fonctions de classe C^∞, l'application u l'est sur $\mathbb{R}^2$. D'où le résultat.

Q 21. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \psi(x) x e^{tx} = x u(x,t),$$

puis pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, par le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left((x,t) \mapsto x u(x,t)\right)(x,t).$$

On calcule la dérivée n^{e} de ce produit de fonctions *via* la formule de dérivation de Leibniz. Comme les dérivées successives de $x \mapsto x$ d'ordre strictement supérieur à 1 sont nulles, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = \binom{n}{0} x \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \binom{n}{1}\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t),$$

d'où le résultat.

Q 22. Montrons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les trois identités de la question **Q 18**. Tout d'abord, c'est bien une suite de polynômes, puisque par la formule de dérivation de Leibniz on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(n-k)}(0) t^k e^{t\cdot 0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(n-k)}(0) t^k.$$

Ensuite, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_0 = u(0,t) = \psi(0) = 1.$$

De plus la question précédente implique, en posant $x = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad A_n'(t) = nA_{n-1}(t).$$

Le membre de gauche donne bien $A_n'(t)$, mais il faut s'en convaincre : *a priori*, évaluer $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$ en $(0,t)$, puis dériver par rapport à t pour obtenir $A_n'(t)$, n'a pas de raison de donner la même chose que de dériver d'abord par rapport à t puis d'évaluer en $(0,t)$. On peut lever ce trouble en notant que si g est l'application $t \mapsto (0,t)$, alors on a : $A_n = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g$. Par la règle de la chaîne, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$A_n'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g\right) = 0 \times \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g(x,t) + 1 \times \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t),$$

car g' est l'application $t \mapsto (0,1)$. Tout va bien.
Enfin, en utilisant ce qu'on vient de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \int_0^1 A_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{A_{n+1}'(t)}{n+1}\mathrm{d}t = \frac{A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0)}{n+1}.$$

Il suffit donc de démontrer que $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour conclure. Pour cela, remarquons :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,t+1) - u(x,t) = \psi(x)e^{tx}\left(e^x - 1\right) = xe^{tx},$$

le calcul devant être fait à part pour $x = 0$ (mais il donne bien 0, qui est égal à xe^{tx}). En dérivant $n+1$ fois par rapport à x, on a par la formule de dérivation de Leibniz :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x,t+1) - \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x,t) = \binom{n+1}{0} x t^{n+1} e^{tx} + \binom{n+1}{1} t^n e^{tx} = \left(xt + (n+1)\right) t^n e^{tx}.$$

Posons $x = 0$. Cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad A_{n+1}(t+1) - A_{n+1}(t) = (n+1)t^n,$$

donc, pour $t = 0$, comme $n \neq 0$ on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
Par unicité de la suite de polynômes vérifiant les trois égalités de la question **Q 18**, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = B_n.$$

Remarque. Il est un exercice relativement classique de montrer que l'inverse d'une fonction développable en série entière, non nulle en 0, est aussi développable en série entière. Cela permet de montrer que $x \mapsto u(x,t)$ est développable en série entière en 0 (à t fixé), et donc égale à la somme de sa série de Taylor dans un voisinage de 0. Or, d'après les résultats de cette partie, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = B_n(t)$. Donc, au voisinage de 0 :

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n.$$

C'est, en fait, la définition parfois rencontrée des polynômes de Bernoulli. On peut s'amuser à retrouver les différentes propriétés de ces polynômes *via* cette formule. Par exemple, pour démontrer l'identité $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$ de la question **Q 19**, il suffit d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(1-t)}{n!} x^n = \frac{xe^{(1-t)x}}{e^x - 1} = \frac{-xe^{t(-x)}}{e^{-x} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{B_n(t)}{n!} x^n,$$

et d'utiliser l'unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière. De même, l'égalité $B_n(1) = B_n(0)$, valable pour tout n différent de 1, peut se démontrer à l'aide de :

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{x(e^x - 1 + 1)}{e^x - 1} = x + \frac{x}{e^x - 1}.$$

Et cætera, et cætera.

IV - Solution entière de l'équation (E_h)

IV.A – *Une inégalité de contrôle*

Q 23. D'après l'hypothèse absurde, on a :

$$\forall c > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = (2n+1)\pi,\ \text{et } : |e^z - 1| < c.$$

En l'appliquant à $c = \frac{1}{p+1} > 0$ pour tout entier naturel p, cela donne :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \exists n_p \in \mathbb{N},\ \exists z_p \in \mathbb{C},\ |z_p| = (2n_p+1)\pi,\ \text{et } : |e^{z_p} - 1| < \frac{1}{p+1}.$$

Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{p\to+\infty} e^{z_p} = 1$, donc la suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie bien les conditions voulues.

Q 24. Par continuité du module et la question précédente, on a : $\lim\limits_{p\to+\infty} |e^{z_p}| = |1| = 1$. Or :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |e^{z_p}| = e^{\mathrm{Re}(z_p)} = e^{a_p},$$

donc : $\lim\limits_{p\to+\infty} e^{a_p} = 1$. Par continuité du logarithme en 1 : $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p = 0$. Ensuite :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |z_p| - |b_p| = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} - \sqrt{b_p^2} = \frac{a_p^2}{\sqrt{a_p^2 + b_p^2} + \sqrt{b_p^2}} = \frac{a_p^2}{|z_p| + |b_p|},$$

donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |z_p| - |b_p| \leqslant \frac{a_p^2}{|z_p|} = \frac{a_p^2}{(2n_p+1)\pi} \leqslant \frac{a_p^2}{\pi}.$$

Comme : $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p^2 = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{p\to+\infty} (|z_p| - |b_p|) = 0.$$

Q 25. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\exp(z_p - i\varepsilon_p|z_p|) &= \exp(z_p - i\varepsilon_p|b_p| - i\varepsilon_p(|z_p| - |b_p|)) \\
&= \exp(z_p - ib_p - i\varepsilon_p(|z_p| - |b_p|)) \\
&= \exp(a_p - i\varepsilon_p(|z_p| - |b_p|)).
\end{aligned}$$

D'après la question précédente (et en écrivant $|\varepsilon_p| = 1$), on a : $\lim\limits_{p\to+\infty} \varepsilon_p(|z_p| - |b_p|) = 0$. Donc, par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{p\to+\infty} \exp(z_p - i\varepsilon_p|z_p|) = \lim_{p\to+\infty} \exp(a_p - i\varepsilon_p(|z_p| - |b_p|)) = 1.$$

Comme $(e^{z_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 1 par la question **Q 23**, la propriété de morphisme de l'exponentielle permet d'en déduire :

$$\lim_{p\to+\infty} \exp(-i\varepsilon_p|z_p|) = 1.$$

Or : $\forall p \in \mathbb{N}$, $|z_p| = (2n_p+1)\pi$, donc :

$$\lim_{p\to+\infty} \exp(-i\varepsilon_p(2n_p+1)\pi) = 1.$$

Voyons pourquoi c'est absurde. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\exp(-i\varepsilon_p(2n_p+1)\pi) = \exp(-\varepsilon_p 2n_p\pi)\exp(-i\varepsilon_p\pi) = -1.$$

Par unicité de la limite : $-1 = 1$, ce qui est absurde.
Par l'absurde, on a montré la propriété $\mathcal{P}$ de l'énoncé.

IV.B – *Une solution à* (E_h)

Q 26. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. En raisonnant comme dans la question **Q 14**, on montre :

$$Q_n(z) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)} - 1} \mathrm{d}t \right) z^k,$$

ce qui prouve que Q_n est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, donc appartient à $\mathcal{E}$.
Il y a toutefois une différence dans la vérification de la convergence normale : justifions-la afin de conclure le traitement de cette question. On l'obtient cette fois-ci avec la majoration :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1], \qquad \left| \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{c} \frac{((2n+1)\pi|z|)^k}{k!},$$

où $c > 0$ est la constante dont l'existence est donnée par la propriété $\mathcal{P}$, démontrée dans la partie précédente. La convergence (absolue) sur $\mathbb{C}$ de la série exponentielle assure, par comparaison, la convergence normale donc uniforme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} \left(t \mapsto \dfrac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)} \dfrac{z^k}{k!} \right)$. Le reste des justifications pour en arriver à l'identité ci-dessus n'est que détails.

Q 27. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $z \in \mathbb{C}$. En reprenant le raisonnement de la question **Q 16**, on a :

$$Q_n(z+1) - Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega_n(t)}}{\omega_n(t)^{n-1}} \mathrm{d}t = \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}} \int_0^1 e^{z(2n+1)\pi\omega(t)} \omega(t)^{-(n-1)} \mathrm{d}t.$$

Appliquons la question **Q 9** à $f : w \mapsto e^{z(2n+1)\pi w} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z(2n+1)\pi)^n}{n!} w^n$. On a alors :

$$Q_n(z+1) - Q_n(z) = \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}} \frac{(z(2n+1)\pi)^{n-1}}{(n-1)!} = nz^{n-1},$$

d'où le résultat.

Q 28. Soit $c > 0$ la constante donnée par la propriété $\mathcal{P}$ démontrée dans la partie IV.A, et soit $(n,z) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$. On a par l'inégalité triangulaire, comme $|\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi$ pour tout $t \in [0,1]$:

$$|Q_n(z)| \leqslant \frac{n!}{c} \int_0^1 \frac{\left| e^{z\omega_n(t)} \right|}{|\gamma_n(t)|^{n-1}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} \int_0^1 e^{|z\omega_n(t)|} \mathrm{d}t = \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} e^{|z|(2n+1)\pi}.$$

Comme : $2n+1 \leqslant 3n$ (on a supposé $n \geqslant 1$), ce calcul montre que pour $b = 3\pi > 0$ on a :

$$|Q_n(z)| \leqslant \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} e^{bn|z|}.$$

Or on a : $n! = \prod\limits_{k=2}^{n} k \leqslant \prod\limits_{k=2}^{n} n = n^{n-1}$, donc :

$$|Q_n(z)| \leqslant \frac{1}{c\pi^{n-1}} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n-1} e^{bn|z|} = \frac{1}{c(2\pi)^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)^{n-1} e^{bn|z|} \leqslant \frac{1}{c} e^{bn|z|},$$

d'où le résultat en posant $a = \frac{1}{c} > 0$.
Remarque. On pouvait aussi montrer qualitativement l'existence de a, en notant que le terme en facteur de $e^{bn|z|}$ converge vers 0 grâce à la formule de Stirling.

Q 29. S'inspirant de la question **Q 17**, montrons que si $h \in \mathcal{E}$, alors :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} Q_{n+1}(x)$$

est dans $\mathcal{E}$ et vérifie (E_h). Pour l'appartenance à $\mathcal{E}$, on développe f en série entière grâce au théorème de Fubini (dont on justifiera qu'il s'applique plus bas) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n+1)! \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \mathrm{d}t \right) z^k && (\textbf{Q 26}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h^{(n)}(0) \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \mathrm{d}t \right) \right] z^k. && \text{(Fubini)}
\end{aligned}$$

Justifions que le théorème de Fubini s'applique (notons que vérifier ses hypothèses implique en outre l'existence et finitude des sommes ci-dessus). On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n+1)! \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \mathrm{d}t \right) z^k \right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right| \sum_{k=0}^{+\infty} (n+1)! \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{|\gamma_{n+1}(t)|^{k-n}}{|e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1|} \mathrm{d}t \right) |z|^k \\
&\leqslant \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right| ((2(n+1)+1)\pi)^{-n} (n+1)! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((2(n+1)+1)\pi|z|)^k}{k!} \qquad \text{(propriété } \mathcal{P}) \\
&= \frac{e^{\pi|z|}}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right| ((2(n+1)+1)\pi)^{-n} (n+1)! \left(e^{2\pi|z|} \right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement que dans la question précédente, on a : $((2(n+1)+1)\pi)^{-n} (n+1)! \leqslant 1$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n+1)! \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \mathrm{d}t \right) z^k \right| \leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right| \frac{\left(e^{2\pi|z|} \right)^{n+1}}{n+1},$$

or h appartient à $\mathcal{E}$ donc sa série de Taylor $\sum_{n \geqslant 0} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est de rayon de convergence infini, et il en est donc aussi de même de sa série entière primitive. La série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge donc absolument en tout point du plan complexe et en particulier en $e^{2\pi|z|}$. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n+1)! \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \mathrm{d}t \right) z^k \right| \leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right| \frac{\left(e^{2\pi|z|} \right)^{n+1}}{n+1} < +\infty.$$

Ceci montre la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n+1)! \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \mathrm{d}t \right) z^k \right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$, par conséquent le théorème de Fubini s'applique et les calculs ayant démontré que f appartient à $\mathcal{E}$ sont valables.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \left(Q_{n+1}(x+1) - Q_{n+1}(x)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n+1) x^n \qquad (\mathbf{Q\,27}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= h(x), \end{aligned}$$

parce qu'une fonction développable en série entière est somme de sa série de Taylor. Ainsi f vérifie (E_h), d'où le résultat.

Remarque. Une autre démonstration était probablement attendue, pour l'appartenance de f à $\mathcal{E}$. En effet, je n'ai pas eu besoin de la question précédente. Cependant je ne dois pas en être loin : le raisonnement ci-dessus ne fait pas apparaître $|Q_{n+1}(z)|$, hélas, à cause du module sur les coefficients de son développement en série entière, mais je me retrouve malgré tout à effectuer des majorations semblables à celles de la question **Q 28**.