

9. (a) Méthode 1. La surface  $S$  est donc constituée de cercles  $C_{a,b}$ , intersection de sphères centrées en 0 et de plans orthogonaux à l'axe, donc

$$C_{a,b} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Ces cercles doivent rencontrer  $\Delta_4$  donc ils décrivent la surface si et seulement si

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - z = 2 \\ y - 2z = 1 \\ x + y + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -y - 2z = 2 - b \\ y - 2z = 1 \\ x + y + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \end{cases} & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4z = 3 - b \\ y - 2z = 1 \\ x + y + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \end{cases} & L_1 \leftarrow L_2 + L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{b-3}{4} \\ y = \frac{b-1}{2} \\ x = \frac{b+5}{4} \\ \left(\frac{b+5}{4}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-3}{4}\right)^2 - a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{b-3}{4} \\ y = \frac{b-1}{2} \\ x = \frac{b+5}{4} \\ 3b^2 - 2b + 19 - 8a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} M \in C_{a,b} \\ 3b^2 - 2b + 19 - 8a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 8(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) - 19 = 0 \end{aligned}$$

Méthode 2 : Étant donné que la droite  $\Delta_4$  est paramétrée par

$$\mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

que la droite  $\Delta_5$  est paramétrée par

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

et de vecteur directeur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et que  $M$  appartient à la surface  $\mathcal{H}$  si et seulement si

$$\exists A \in \Delta_5, B \in \Delta_4, \begin{cases} \langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{BA}, \vec{u} \rangle = 0 \\ \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$M \in S \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + y + z = 3\lambda \\ 3 + 4\mu = 3\lambda \\ (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 + (z - \lambda)^2 = (2 + \mu - \lambda)^2 + (1 + 2\mu - \lambda)^2 + (\mu - \lambda)^2 \end{cases}$$

On élimine dans le système précédent les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  puisque l'on a

$$\lambda = \frac{x + y + z}{3}$$

$$\mu = \frac{1}{4}(x + y + z - 3)$$

L'équation de la surface est donc donnée par la dernière équation du système précédent. Calculons ensuite le membre de gauche :

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{x + y + z}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{x + y + z}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{x + y + z}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left( (3x - (x + y + z))^2 + (3y - (x + y + z))^2 + (3z - (x + y + z))^2 \right) \\ &= \frac{1}{9} (9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6(x + y + z)(x + y + z) + 3(x + y + z)^2) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{3}(x + y + z)^2 \end{aligned}$$

Calculons maintenant le membre de droite, on a

$$\begin{aligned} 2 + \mu - \lambda &= \frac{5}{4} - \frac{1}{12}(x + y + z) \\ 1 + 2\mu - \lambda &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x + y + z) \\ \mu - \lambda &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{12}(x + y + z) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{12}(x + y + z)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x + y + z)\right)^2 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{12}(x + y + z)\right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \left( 38 - 4(x + y + z) + \frac{2}{3}(x + y + z)^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( 19 - 2(x + y + z) + \frac{1}{3}(x + y + z)^2 \right) \end{aligned}$$

Et finalement, on obtient

La surface  $S$  est d'équation

$$8(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) - 19 = 0$$

(b) En utilisant l'indication, le centre est solution du système linéaire

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 5 & -1 \end{array} \right)$$

qui, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, admet une unique solution donnée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Le centre de la surface  $S$  admet pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(c) Une équation réduite dans le nouveau repère est donnée par  $\varphi(x+1, y+1, z+1) = 0$ , soit après calculs

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 6(xy + yz + xz) - 16 = 0$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

associée à la partie quadratique admet  $-1$  pour valeur propre pour le vecteur propre  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Comme la surface est de révolution d'axe dirigé par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , les deux

autres valeurs propres pour les vecteurs propres situés dans le plan  $\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^\perp$

(par théorème spectral) sont égales, et la trace permet de dire que la deuxième valeur propre de multiplicité 2 est égale à 8. Ainsi dans le repère de centre  $\Omega$  et d'axes donnés par une base orthonormale adaptée à la décomposition

$$\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^\perp \oplus \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

l'équation de la quadrique devient :

$$8X^2 + 8Y^2 - Z^2 - 16 = 0$$

soit

$$\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = \frac{1}{16}Z^2 + 1$$

Ainsi d'après la classification des quadriques, la surface est un hyperboloïde (de révolution) à une nappe.