MINES MP 1 : 8 mai 2000 8-11h

Partie préliminaire

(0.) L'ensemble M est un espace vectoriel réel.

Notons que $M = \{re(a.I) + im(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + reb.\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + imb.\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\}$.

Ceci permet de voir que c'est un $R-$ev de dimension 4 (engendré par les quatre matrices explicitées).

Pour démontrer que le produit de deux matrices m_1 et m_2 de l'espace M appartient encore à M, il suffit de vérifier que c'est vrai pour ces quatre générateurs.

C'est un peu fastidieux, mais

- La première matrice est ld'identité, neutre pour la multiplication
- le carré de chacune des trois autres matrices $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ est dans M, à savoir $u^2 = I = w^2, v^2 = -I$,
- le produit de deux quelconques de ces trois matrices est au signe près la troisième. Plus précisément,

$$u.v = -w = -v.u \qquad v.w = v.(v.u) = v^2.u = -u \quad \text{et similairement} \quad w.v = u, \qquad u.w = -w.u = v$$

M est donc stable par multiplication: c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(C)$.

Soit $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in G$: la condition $\det m = 1$ signifie tout simplement que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Comme det est un morphisme multiplicatif et $\{1\}$ un sous-groupe de $(C^*, \times)$ il est trivial que l'ensemble G est un groupe pour le produit des matrices (admis).

Les autres résultats admis sont tout aussi faciles.

Première partie

(I.1) Propriétés élémentaires des matrices de l'espace M : Soit $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in M$;

$$m + {}^t\overline{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{a} & -ib \\ -i\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\overline{a} & 0 \\ 0 & a+\overline{a} \end{pmatrix} = tr(m.I)$$

$$m.{}^t\overline{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{a} & -ib \\ -i\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2+|b|^2 \end{pmatrix} = \det m.I$$

Pour qu'une matrice g de l'espace M appartienne au groupe G il faut et il suffit donc que $g^{-1} = {}^t\overline{g}$.

L'autre relation trouvée ci-dessus prouve que si m est une matrice de l'espace M,

$$tr\ (m) = 0 \iff m +^t \overline{m} = 0 \iff m = -{}^t\overline{m} = 0$$

Calculons plus généralement m^2, pour cela on ruse:

$$tr\ m.m = m.(tr\ m.I) = m.(m + {}^t\overline{m}) = m^2 + m.{}^t\overline{m} = m^2 + \det m.I \quad \text{(on reconnaît Cayley-Hamilton !)}$$

et donc $m^2 = tr\ m.m - \det m.I = -\det m.I$ puisque $tr\ m = 0$.

De même (transposer ne change pas le det) $({}^tm)^2 = -\det m.I$.

(I.2) Matrices u :

Soit $u = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in U$: on a donc (sucessivement)

$$a = 0 \qquad b \in i.R \qquad |b|^2 = 1 \qquad b = \pm i \qquad u = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}$$

du pb ! Soient m une matrice de l'espace M, u une matrice de l'ensemble U. On peut donc (au signe près) poser $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Prenons $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$: il vient

$$m.u = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib & a \\ -\overline{a} & i\overline{b} \end{pmatrix} \qquad u.\overline{m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{a} & -i\overline{b} \\ -ib & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib & a \\ -\overline{a} & i\overline{b} \end{pmatrix}$$

Ces deux produits sont donc égaux.
Lorsque la trace de la matrice m est nulle, c'est à dire que a est imaginaire pur, on a $a = -\overline{a}$, c'est à dire que $m.u$ est symétrique (non réelle !)De même pour $u.m = \bar{m}.u$ en raisonnant sur $\bar{m}$. Par stabilité de M pour le produit, on est donc dans V.

(I.3) Norme d'une matrice m :
Soit m une matrice de l'espace M ;

$$||m|| = \sqrt{(m|m)} = \sqrt{\frac{1}{2}tr\ ({}^t\overline{m}.m)} = \sqrt{\frac{1}{2}tr\ (m.{}^t\overline{m})} = \sqrt{\frac{1}{2}tr\ (\det m.I)} = \sqrt{\det m}$$

Pas d'inquiétude: le déterminant d'un élément de M est toujours un réel positif ! on en déduit pour m et w dans M

$$||m.w|| = \sqrt{\det(m.w)} = ||m||.||w||$$

car det et $\sqrt{}$ sont des morphismes multiplicatifs (passent aux produits, kôa).
(remarque: cette astuce nous évite LA vérification pénible sur les quaternions...)

(I.4) Matrices appartenant à G :

(a) Soit $g = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ appartenant au groupe G; cela signifie que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On peut donc poser $a = \cos\theta + ci$, puisque$|re\ a|^{3/4}|a|^{3/4}1$. Il vient alors $g = \cos\theta I + m$, où $m = \begin{pmatrix} ci & ib \\ i\overline{b} & -ci \end{pmatrix} \in M$ et $tr\ m = 0$.
Le déterminant de la matrice m vaut $c^2 + |b|^2 = (|a|^2 - \cos^2\theta) + |b|^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$.
Enfin $m^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - |b|^2 & 0 \\ 0 & -c^2 - |b|^2 \end{pmatrix} = -\sin^2\theta.I$.

(b) Soit m une matrice de l'espace M différente de 0 ; alors
$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m$ vérifie $g_1 \in M$ et $\det g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}^2}.\det m = 1$, donc $g_1 \in G$.
Rem: au passage on remarque que toute matrice non nulle m de M admet un inverse **dans** *M, qui est $\frac{1}{\sqrt{\det m}}{}^t\overline{m}$. La notion de corps non commutatif n'étant pas au programme, il est juste que cette propriété ne soit pas évoquée par le sujet.*

(I.5) Un sous-groupe de G :
Remarquons pour le plaisir que $G(g_1)$ est une ellipse !

(a) $G(g_1)$ est (aussi) un sous groupe commutatif du groupe G. En effet, si l'on considère deux éléments de G_1, par exemple m_θ et m_ψ, on a

$$m_\theta.m_\psi = (I\cos\theta + g_1\sin\theta).(I\cos\psi + g_1\sin\psi) = I.\cos\theta\cos\psi + g_1(\sin\theta + \sin\psi) + g_1^2\sin\theta\sin\psi$$

et comme $g_1^2 = -\det g_1.I = -I$, il reste

$$m_\theta.m_\psi = I.(\cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi) + g_1(\cos\theta\sin\psi + -\sin\theta\cos\psi) = m_{\theta+\psi}$$

On peut vérifier que $m_\theta^{-1} = m_{-\theta}$, mais la relation qui nous venons d'obtenir prouve que l'on a un (iso)morphisme entre le groupe des angles (modulo 2π) et le groupe $G(g_1)$.

(b) On peut couper la somme en 2 car la famille de tous les termes est sommable:

$$\exp(\theta.g_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\theta^n g_1^n = \sum_{n\text{pair}}^{+\infty} \frac{1}{n!}\theta^n g_1^n + \sum_{n\text{impair}}^{+\infty} \frac{1}{n!}\theta^n g_1^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!}(-1)^p I + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}(-1)^p g_1$$

puisque $g_1^2 = -I$. Moralité: on reconnaît les séries définissant sinus et cosinus, et donc
$\boxed{\exp(\theta.g_1) = \cos\theta I + \sin\theta g_1 = m_\theta}$ *Remarque: on retrouve le résultat classique sur les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire.*

Deuxième partie

(II.1) L'endomorphisme $\mathbf{l_g}$ de V :

(a) Soit $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in V$. La seule condition est donc $b \in R$ (termes non diagonaux imaginaires purs), il reste 3 degrés de liberté sur 4, c'est la dimension de V. Prouvons-le en donnant une base: un tel m s'écrit

$$m = b\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \ rea.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ ima.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices étant visiblement indépendantes ($m = 0 \iff a = b = 0$) constituent une base de V.

(b) $l_g(w) = g.w + w.{}^tg$ est une application de V dans V, car ${}^t(l_g(w)) = {}^t(g.w) + {}^t(w.{}^tg) = {}^tw.{}^tg + g{}^tw = l_g(w)$ et par ailleurs $l_g(w) \in M$, ce dernier espace étant stable par produit et par transposition.
Enfin l_g est linéaire (produits...): c'est un endormorphisme de l'espace vectoriel V.
Il n'est pas nul, car par exemple $l_g(I) = g + {}^tg$ ne peut être nul que si $g \in G$ est antisymétrique, soit $g \in U$; mais alors nous avons vu que $g = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, auquel cas $l_g(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}) \neq 0$.

(II.2) Propriétés de l'endomorphisme $\mathbf{l_g}$:

(a) • $l_g \circ l_g(w) = l_g(l_g(w)) = g.(g.w + w.{}^tg) + (g.w + w.{}^tg).{}^tg = -w + 2g.w.{}^tg - w = 2g.w.{}^tg - 2w$.
Par ailleurs, $2g.l_g(w) = 2g.(g.w + w.{}^tg) = -2w + 2g.w.{}^tg$ (on a utilisé que $g^2 = -I$).
Donc $\boxed{\text{Les deux endomorphismes coïncident (sur } V)}$ En appliquant cette propriété à $l_g(w)$ comme à w, il vient
• $l_g(g.l_g(w))) = \frac{1}{2}l_g \circ l_g \circ l_g(w) = \frac{1}{2}l_g \circ l_g[l_g(w)] = \frac{2}{2}g.l_g[l_g(w)] = g.2g.l_g[w] = -2l_g(w)$.
• Comme $\|g.h\| = \|g\|.\|h\|$ dans M et $\|g\| = \sqrt{\det g} = 1$, les deux normes $||l_g(w)||$ et $||g.l_g(w)||$ sont égales.
• Considérons une matrice u de l'ensemble U,via **I.2** qui s'applique car $tr\ g = 0$, il vient

$$l_g(g.u) = g.(g.u) + (g.u).{}^tg = -u + (u.\overline{g}.)^tg = -u + u.I = 0 \qquad (\overline{g}.{}^tg = \overline{g.{}^t\overline{g}} = I)$$

(b) Soient v et w dans l'espace V, $tr\ g = 0$ on a $g^2 = -I$ c'est à dire que $g^{-1} = {}^t\overline{g} = -g$; d'où

$$\begin{aligned}(l_g(v)|w) &= \frac{1}{2}tr\ \left((g.v + v.{}^tg).\overline{w}\right) = \frac{1}{2}tr\ (g.v.\overline{w}) - \frac{1}{2}\ tr\ (v.\overline{g}.\overline{w}) \qquad (\text{car } {}^tg = -\overline{g}) \\ &= \frac{1}{2}tr\ (\overline{w}.g.v) - \frac{1}{2}\ tr\ (\overline{g}.\overline{w}.v) \qquad (\text{car la trace “commute”; transposons:}) \\ &= \frac{1}{2}tr\ \left({}^tv{}^tg{}^t\overline{w} - {}^tv{}^t\overline{w}{}^t\overline{g})\right) = \frac{1}{2}tr\ \left({}^tv(-\overline{g}.{}^t\overline{w} -{}^t\ \overline{w}.{}^t\overline{g})\right) \qquad \text{et conjugons:} \\ &= -\frac{1}{2}tr\ \left({}^t\overline{v}.(g.{}^tw + {}^tw.{}^tg) = -\frac{1}{2}tr\ \left({}^t\overline{v}.(g.w + w{}^tg)\right) = -(v \mid l_g(w))\right.\end{aligned}$$

En utilisant que ${}^tw = w$. Ce qui signifie que l'endomorphisme adjoint de l_g est $-l_g$!
$\boxed{l_g \text{ est antisymétrique, ie } l_g^* = -l_g}$

Rem: avec quelques résultats souvent faits en exo en MP, on obtient hic et nunc que l_g a pour valeurs propres complexes $\{0, -2i, 2i\}$, un noyau orthogonal à l'image, etc...

(c) Soit $w \in V$, on a compte tenu de ce qui précède

$$\big(l_g(w) \mid g.l_g(w)\big) = \big(w \mid l_g^*(g.l_g(w))\big) = \big(w \mid -l_g(g.l_g(w))\big) = \big(w \mid 2l_g(w)\big) = \big(2l_g^*(w) \mid w\big) = -\big(2l_g(w) \mid w\big) = 0$$

puisque cette quantité est égale à son opposé. Ces deux marices sont donc orthogonales ("perpendiculaires", comme dit l'énoncé).

(II.3) Une base de l'espace V :

(a) $(u \mid h_0) = (u \mid g.u) = \frac{1}{2} tr\ (g.u.{}^t\bar{u}) = \frac{1}{2}\ tr\ g = 0$ par hypothèse;
$(u \mid h_1) = (u \mid l_g(v)) = (-l_g(u) \mid v) = (0 \mid v) = 0;$
$(u \mid h_2) = (u \mid g.l_g(v)) = (u \mid \frac{1}{2} l_g(l_g(v))\ ) = (-l_g(u) \mid l_g(v))) = 0$
$(h_0 \mid h_0) = \|g.u\|^2 = \|g\|^2\|u\|^2 = 1.1 = 1$
$(h_1 \mid h_1) = \|l_g(v)\|^2 > 0$
$(h_2 \mid h_2) = \|g.h_1\|^2 = \|h_1\|^2$ puisque $\|g\| = 1$.
$(h_0 \mid h_1) = (g.u \mid l_g(v)) = (l_g^*(g.u) \mid v) = -(l_g(g.u) \mid v) = (0 \mid v) = 0$ (**II.2.a**)
$(h_0 \mid h_2) = (g.u \mid g.l_g(v)) = \frac{1}{2}\big(g.u \mid l_g(l_g(v))\big) = \frac{1}{2}\big(l_g^*(g.u) \mid l_g(v)\big) = (0 \mid l_g(v)) = 0$
$(h_1 \mid h_2) = (l_g(v) \mid g.l_g(v)) = 0$ (question précédente)

(b) La famille des matrices h_i, $0 \leq i \leq 2$, est orthogonale, ne contient pas 0, donc est libre: vu son cardinal c'est une base de l'espace vectoriel V. On fait de cette base une base orthonormée en divisant h_1 et h_2 par leurs normes.
La matrice associée à l'endormophisme l_g dans cette base peut être obtenue en projetant (orthogonalement) les images sur la base orthogonale en question: on sait déjà que $l_g(h_0) = l_g(g.u) = 0$; de plus, avec ce qui précède,

$$\begin{aligned} l_g(h_1) = l_g(l_g(v)) &= \frac{(l_g(h_1) \mid h_0)}{\|h_0\|^2}h_0 + \frac{(l_g(h_1) \mid h_1)}{\|h_1\|^2}h_1 + \frac{(l_g(h_1) \mid h_2)}{\|h_2\|^2}h_2 \\ &= \frac{(l_g(v) \mid -l_g(h_0))}{\|h_0\|^2}h_0 + \frac{(l_g(l_g(v))) \mid l_g(v))}{\|h_1\|^2}h_1 + \frac{(2h_2 \mid h_2)}{\|h_2\|^2}h_2 = 2h_2 \end{aligned}$$

Donc $l_g(h_1) = 2h_2$. De même, comme $(l_g(h_2) \mid h_1) = (l_g(g.l_g(v)) \mid l_g(v)) = (-2l_g(v) \mid l_g(v)) = -2\|h_1\|^2$ et $l_g(h_2) \mid h_2) = 0$, on trouve que $l_g(h_2) = -2h_1$.

Finalement, $\boxed{\text{La matrice de } l_g \text{ dans la base } (h_0, h_1, h_2) \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$ La transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\frac{1}{2}l_g$ n'a pas de nom dans le programme, c'est la composée (commutative) d'une projection orthogonale sur le plan engendré par (h_1, h_2) et d'une rotation d'angle $\pi/2$ autour de h_0.

(II.4) Un endormorphisme de l'espace vectoriel M :
Soit $m_\theta = I\cos\theta + g\sin\theta$ où $\theta \in [0, 2\pi]$ et $s_\theta : w \mapsto m_\theta.w$.
En admettant que u, h_0, h_1, h_2 constituent une base (c'est parce que $M = R.U \oplus V$), et elle est orthogonale d'après **II.3.a**), on peut rechercher la matrice de s_θ dans cette base: d'abord notons que pour w quelconque

$$s_\theta(w) = w\cos\theta + g.w\sin\theta$$

On en déduit par des calculs simples (utilisant seulement que $g^2 = -I$) la matrice

$$\boxed{M(s_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

Troisième partie

(III.1) Endomorphisme $\psi_{\mathbf{m}}$ de l'espace V :

(a) Il est clair que l'application $w \mapsto m.w.^t m$ est un endomorphisme de M. Reste à vérifier la stabilité de V: or si $v \in V, {}^t v = v$ et ${}^t(m.v.^t m) = m.v.^t m$, cqfd.
Pour $u \in U$, on a $m.u.^t m = m.^t \bar{m} u = \det m u$ (cf. **I2**).

(b) Si ψ_m est l'application identité, c'est que pour tout w on a $m.w.^t m = w$. En particulier pour $w = I$ on trouve que $m.^t m = I$ et donc m est réelle, de norme 1, c'est nécessairement une matrice de rotation $\begin{pmatrix} a & b' \\ -b' & a \end{pmatrix}$.
On applique alors à $w = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ par exemple, ce qui donne $b = 0$ et finalement :
$\boxed{\text{Le noyau de l'action de groupe } m \in M \setminus \{0\} \mapsto \psi_m \text{ est réduit à } \pm I}$.

(III.2) Endomorphisme $\psi_{\mathbf{g}}$:

(a) La question I-4 prouve l'existence d'un (unique) réel $\theta \in [0, \pi]$ et d'une matrice $m \in M$, différente de 0, de trace nulle, telle que $g = I \cos\theta + m$. La condition $g \neq \pm I$ impose $\sin\theta \neq 0$, c'st à dire $\theta \in]0, \pi[$, cqfd.
Soit γ la matrice définie à partir de la matrice m par la relation suivante : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m$.
Rappelons que $\det m = \sin^2\theta$ et donc $m = \gamma \sin\theta, g = I\cos\theta + \gamma\sin\theta = m_\theta$.

(b) $\psi_g(w) = (I\cos\theta + \gamma\sin\theta).w.(I\cos\theta +^t \gamma\sin\theta) = w\cos^2\theta + \cos\theta(m.w + w^t m) + m.w.^t m$
En remplaçant $m = \gamma\sin\theta$, il vient $\boxed{\psi_g(w) = w\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta l_\gamma(w) + \sin^2\theta\psi_\gamma(w)}$

(c) On a donc $\psi_g = I\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta l_\gamma + \sin^2\theta\psi_\gamma$: il suffit de trouver la matrice de ψ_γ.
Or $\gamma \in G$ et $tr\ \gamma = 0$ par construction: on a donc $\gamma^2 = -I$ comme le g de la partie II. Ce qui permet d'écrire
- $\psi_\gamma(\gamma u) = -u^t\gamma = -{}^t\overline{\gamma} u = \underline{\gamma u}$ (en utilisant aussi **I.2**)
- $\psi_\gamma(l_\gamma(v)) = \gamma(\gamma v + v^t\gamma)^t\gamma = -v^t\gamma - \gamma v = \underline{-l_\gamma(v)}$.
- $\psi_\gamma(\gamma l_\gamma(v)) = -(\gamma v + v^t\gamma)^t\gamma = -\gamma.v.^t\gamma - v = \underline{-\gamma l_\gamma(v}$.

ψ_γ est donc un demi-tour, et la matrice de ψ_g est donc $\boxed{Mat(\psi_g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 0 & -2\cos\theta\sin\theta & \cos^\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix}}$
son déterminant est $\det\psi_g = 1$ et c'est une rotation d'angle 2θ autour de l'axe dirigé par $h_0 = \gamma.u$.
On a donc ainsi n'importe quelle rotation de V.

(III.3) Endormorphisme $\psi_{\mathbf{m}}$:
Soit m une matrice différente des matrices $0, I$ et $-I$, et posons $g = \dfrac{m}{\sqrt{\det m}}$; on a alors $g \in G$et $\psi_m = \det m\psi_g$.
L'endomorphisme ψ_m est donc une similitude directe.
