

## Problème I

Dans tout le problème, on considère la fonction numérique  $f$  de variable réelle définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 \text{ réel fixé et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

### I. Étude de la fonction $f$

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .
2. Déterminer les deux racines de l'équation  $f(x) - x = 0$ .  
Ces deux racines sont réelles et de signe contraire. On note  $\ell_1$  la racine négative et  $\ell_2$  la racine positive.
3. Montrer que, pour tout  $x$  réel :  
si  $x < \ell_1$ , alors  $f(x) < \ell_1$  ;  
si  $1 < x < 2$  alors  $1 < f(x) < 2$ .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  en faisant notamment figurer dans le tableau les valeurs de  $x$  égales à  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ , 1 et 2 ainsi que les valeurs correspondantes de  $f(x)$ .
5. Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$ , noté  $C_f$ , dans un repère orthonormal du plan d'unité graphique 2 cm.  
Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe  $C_f$  avec l'axe des abscisses.
6. Sur le même graphique, tracer la droite  $D$  d'équation  $y = x$ .  
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe  $C_f$  et de la droite  $D$  ainsi que la position de  $C_f$  par rapport à  $D$ .

### II. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Sur le graphique précédent représenter à l'aide de la courbe  $C_f$  et de la droite  $D$  les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 
  - a) lorsque  $u_0 = -0,7$  ;
  - b) lorsque  $u_0 = 1,25$ .
2. Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite finie  $\lambda$ , alors  $\lambda$  ne peut prendre que l'une des deux valeurs  $\ell_1$  ou  $\ell_2$ .
3. **Dans cette question, on suppose :  $u_0 < \ell_1$ .**
  - 3.1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < \ell_1$ .
  - 3.2. Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
  - 3.3. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente? Justifier la réponse.
4. **Dans cette question, on suppose :  $u_0 \in ]1, \ell_2[$ .**
  - 4.1. Démontrer que  $\ell_2 < u_1 < 2$ .

Dans les questions qui suivent, on note  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites définies pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ .

- 4.2. Prouver que, pour tout entier naturel,  $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$  et  $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$ .
- 4.3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  
$$1 < v_n < \ell_2 \quad \text{et} \quad \ell_2 < w_n < 2.$$
- 4.4. Pour tout réel  $x$ , calculer  $f \circ f(x)$ .
- 4.5. Déterminer  $a$  et  $b$  réels tels que, pour tout réel  $x$ ,  
$$f \circ f(x) - x = (-x^2 + x + 1)(x^2 + ax + b).$$

- 4.6. Déterminer les valeurs du réel  $x$  telles que  $f \circ f(x) - x = 0$ .  
En déduire le signe de  $f \circ f(x) - x$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1, 2[$ .
- 4.7. En étudiant le signe de  $v_{n+1} - v_n$  pour  $n$  entier naturel, démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  
Montrer par la même méthode que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- 4.8. Prouver que les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes et préciser la limite de chacune d'entre elles.
- 4.9. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente? Justifier la réponse.

\*\*\*\*\*

## Problème II

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Étant donné un réel strictement positif  $p$  ( $p > 0$ ), on désigne par  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = -\frac{p}{2}$  et par F le point de coordonnées  $(0, \frac{p}{2})$ .

On considère l'ensemble des points M du plan équidistants du point F et de la droite  $\mathcal{D}$  c'est-à-dire tels que  $MF = MH$  où H est le projeté orthogonal de M sur la droite  $\mathcal{D}$ .

Par définition, cet ensemble est la parabole  $\mathcal{P}$  de directrice  $\mathcal{D}$  et de foyer F.

*Pour répondre aux différentes questions, il est vivement conseillé de faire plusieurs schémas qui pourront servir de supports aux divers raisonnements.*

### Question préliminaire

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur la droite  $\mathcal{D}$ .

Vérifier que O appartient à la parabole  $\mathcal{P}$  et que O est le milieu du segment [FK].

O est appelé sommet de la parabole.

### Partie I Étude de quelques propriétés de la parabole et de ses tangentes

1. Soit M un point du plan de coordonnées  $(x, y)$ .
  - 1.1. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de M sur la droite  $\mathcal{D}$ .
  - 1.2. Déterminer une équation de l'ensemble des points M du plan tels que :  
 $MF^2 = MH^2$ .
  - 1.3. En déduire que la parabole  $\mathcal{P}$  de foyer F et de directrice  $\mathcal{D}$  a pour équation  $y = \frac{1}{2p}x^2$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
2. En choisissant 2 cm pour unité graphique dans le plan, tracer la parabole  $\mathcal{P}_0$  correspondant au cas  $p = \frac{1}{2}$ . On placera sur le graphique le foyer  $F_0$  et la directrice  $\mathcal{D}_0$  de la parabole.

*On revient maintenant au cas général où  $p$  est un réel strictement quelconque.*

3. Soient  $M_0$  un point de la parabole  $\mathcal{P}$  d'abscisse  $x_0$  et  $H_0$  le projeté orthogonal de  $M_0$  sur la droite  $\mathcal{D}$ .
  - 3.1. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}_0$  en  $M_0$  à la parabole  $\mathcal{P}$ . Préciser la tangente au sommet de la parabole; cette droite sera désignée par  $d$ .
  - 3.2. Montrer que la droite  $\mathcal{T}_0$  est la médiatrice du segment  $[FH_0]$ .
  - 3.3. Soit  $T_0$  le point d'intersection de la tangente  $\mathcal{T}_0$  en  $M_0$  à la parabole  $\mathcal{P}$  avec la droite  $\mathcal{D}$ . Que représente la droite  $\mathcal{T}_0$  pour l'angle  $\widehat{H_0T_0F}$ ?

3.4. Montrer que les droites  $(FT_0)$  et  $(FM_0)$  sont perpendiculaires.

3.5. Soit  $f_0$  le projeté orthogonal de  $F$  sur la tangente  $\mathcal{T}_0$  en  $M_0$  à  $\mathcal{P}$ .

Montrer que  $f_0$  est un point de la droite  $d$ .

4. Soient  $A$  et  $B$  deux points de la parabole  $\mathcal{P}$  d'abscisses respectives  $a$  et  $b$  avec  $a < b$ .

Les tangentes en  $A$  et  $B$  à la parabole  $\mathcal{P}$  se coupent au point  $Q$ .

4.1. Déterminer les coordonnées des points  $A$ ,  $B$  et  $Q$ .

4.2. On désigne par  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et par  $E$  le point d'intersection de la droite  $(IQ)$  avec la parabole  $\mathcal{P}$ .

Montrer que les droites  $(IQ)$  et  $\mathcal{D}$  sont perpendiculaires.

Déterminer les coordonnées du point  $E$ ; vérifier que  $E$  est milieu du segment  $[IQ]$ .

4.3. Montrer que la droite qui passe par les points  $\alpha$  et  $\beta$  milieux respectifs des segments  $[AQ]$  et  $[BQ]$  est tangente en  $E$  à la parabole  $\mathcal{P}$ .

**Partie II** *On s'intéresse dans cette partie à la construction « à la règle et au compas » des tangentes à la parabole  $\mathcal{P}$  issues d'un point donné du plan.*

1. On appelle :

« intérieur de la parabole  $\mathcal{P}$  » l'ensemble des points  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  tels que

$$y > \frac{1}{2p}x^2,$$

« extérieur de la parabole  $\mathcal{P}$  » l'ensemble des points  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  tels que

$$y < \frac{1}{2p}x^2.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les distances du point  $M$  au point  $F$  et du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  pour que ce point  $M$  appartienne à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) de la parabole  $\mathcal{P}$ .

2. Soit  $M_0$  un point de la parabole  $\mathcal{P}$ ,  $H_0$  le projeté orthogonal de  $M_0$  sur la droite  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{T}_0$  la tangente à la parabole  $\mathcal{P}$  au point  $M_0$ .

2.1. Montrer que pour tout point  $N$  de la droite  $\mathcal{T}_0$ ,  $NH_0 = NF$ .

2.2. Montrer que tout point  $N$  de la droite  $\mathcal{T}_0$ , distinct de  $M_0$ , est extérieur à la parabole  $\mathcal{P}$ .

2.3.  $N$  désigne un point du plan.

Déterminer le nombre de tangentes à la parabole  $\mathcal{P}$  passant par  $N$  selon la position de  $N$  dans le plan.

2.4. Dans le cas où il existe deux tangentes à la parabole  $\mathcal{P}$  passant par le point  $N$ , déduire des questions précédentes une construction « à la règle et au compas » de ces tangentes.

**Partie III** *On s'intéresse dans cette partie à la construction « à la règle et au compas » du ou des points d'intersection de la parabole  $\mathcal{P}$  de foyer  $F$  et de directrice  $\mathcal{D}$  avec une droite du plan, s'il(s) existe(nt).*

Le point  $F$  et la droite  $\mathcal{D}$  étant donnés, on désigne par  $\Delta$  une droite du plan.

1. Étude de deux cas particuliers.

1.1. Construire le (ou les) point(s) d'intersection de la droite  $\Delta$  et de la parabole  $\mathcal{P}$  lorsque la droite  $\Delta$  est perpendiculaire à la droite  $\mathcal{D}$ .

1.2. Construire, s'ils existent, le (ou les) point(s) d'intersection de la droite  $\Delta$  et de la parabole  $\mathcal{P}$  lorsque la droite  $\Delta$  est parallèle à la droite  $\mathcal{D}$ .

2. Prouver que la parabole  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des centres des cercles passant par le point  $F$  et tangents à la droite  $\mathcal{D}$ .

3. Étude du cas général.

On suppose que la droite  $\Delta$  n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ . On note  $T$  le point d'intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et de la droite  $\Delta$ .

3.1. Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles centrés sur la droite  $\Delta$  et tangents à la droite  $\mathcal{D}$ .

Montrer que le cercle  $\mathcal{C}'$  est l'image du cercle  $\mathcal{C}$  par une homothétie de centre T.

On suppose dans les deux questions suivantes qu'il existe au moins un point M de la parabole  $\mathcal{P}$  appartenant à la droite  $\Delta$ .

3.2. Montrer que tout cercle centré sur la droite  $\Delta$  et tangent à la droite  $\mathcal{D}$  coupe la droite (TF) en au moins un point.

3.3. Proposer une construction « à la règle et au compas » du ou des points d'intersection de la droite  $\Delta$  avec la parabole  $\mathcal{P}$  lorsque ces points existent.

**Partie IV** *On se propose dans cette partie de déterminer, par deux méthodes différentes, l'aire d'un « segment » de parabole, c'est-à-dire l'aire de la partie de plan délimitée par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend.*

Dans cette partie, on considère toujours la parabole  $\mathcal{P}$  de directrice  $\mathcal{D}$  et de foyer F admettant dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  l'équation  $y = \frac{1}{2p}x^2$ .

A et B sont deux points de la parabole  $\mathcal{P}$ ; les tangentes en A et B à  $\mathcal{P}$  se coupent au point Q.

### 1. Méthode analytique

On note  $a$  et  $b$  les abscisses respectives des points A et B avec  $a < b$ .

1.1. Déterminer l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle ABQ.

1.2. Déterminer une équation de la droite (AB).

1.3. Déterminer l'aire  $\mathcal{A}'$  de la partie de plan délimitée par l'arc de parabole  $\widehat{AB}$  et la corde [AB] en fonction de  $\mathcal{A}$ .

1.4. Quelle relation existe-t-il entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  ?

### 2. Méthode géométrique

Les résultats des questions 2.1. à 2.4. sont utilisés par Archimède dans son ouvrage sur la « quadrature du segment de parabole ».

I désigne le milieu du segment [AB], E l'intersection de la droite (IQ) avec la parabole  $\mathcal{P}$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont les milieux respectifs des segments [AQ] et [BQ].

On admet que tout point situé à l'intérieur ou sur les côtés du triangle AEB appartient à la partie de plan délimitée par l'arc de parabole  $\widehat{AB}$  et la corde [AB] qui le sous-tend et que tout point de cette partie du plan est situé à l'intérieur ou sur les côtés du triangle ABQ.

2.1. Montrer que E est le milieu du segment  $[\alpha\beta]$ .

2.2. Exprimer l'aire du triangle ABE en fonction de  $\mathcal{A}$ , aire du triangle ABQ et justifier l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\mathcal{A} \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}.$$

2.3. On désigne par K et K' les milieux respectifs des segments [AE] et [BE] et par L et L' les points d'intersection de la parabole  $\mathcal{P}$  respectivement avec les droites  $(\alpha K)$  et  $(\beta K')$ .

2.3.1 Exprimer l'aire des triangles AEL et EBL' en fonction de  $\mathcal{A}$ , aire du triangle ABQ.

2.3.2 Exprimer l'aire du triangle  $\alpha\beta Q$  à l'aide de  $\mathcal{A}$ .

2.3.3 Démontrer la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\mathcal{A} \left(1 + \frac{1}{4}\right) \leq \mathcal{A}' \leq \mathcal{A} \left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

2.4. En itérant  $n$  fois ( $n$  entier naturel strictement positif) le procédé décrit précédemment, déterminer un encadrement de l'aire  $\mathcal{A}'$  de la partie de plan délimité par l'arc de parabole  $\widehat{AB}$  et la corde [AB] en fonction de  $\mathcal{A}$ .

2.5. Qu'obtient-on par passage à la limite ?

2.6. À quelle époque et où vivait Archimède ? Citer au moins un résultat scientifique et au moins une invention technologique attribués à Archimède.