

PREMIER PROBLEME :

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

1. Par opérations, f est définie en x tel que $x \neq 0$ et $1+x > 0$: $\boxed{\text{sur }]-1, 0[\cup]1, +\infty[}$

2. On a $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 o(1) \text{ quand } x \rightarrow 0}$

Et comme, pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x o(1) \rightarrow 1$ alors f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$

On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .

3. On détermine son taux d'accroissement pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{1 - \frac{x}{2} + x o(1) - 1}{x} \\ &= \frac{-1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{-1}{2}}$

Pour $x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$, f est C^1 par opérations et $\boxed{f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \text{ sur } D}$

Reste à montrer que f est C^1 en 0 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{x - (1+x) \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 o(1) \right)}{x^2 (1+x)} \\ &= \frac{x^2 \left(-1 + \frac{1}{2} \right) + x^2 o(1)}{x^2 (1+x)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1+x} \rightarrow \frac{-1}{2} = f'(0) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1, 0[\cup]1, +\infty[\text{ et en } 0 \text{ donc sur } D'}$

4. $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = f'(x) = \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2 (1+x)}$ et soit $k(x) = x - (1+x) \ln(1+x)$.

le numérateur de f'

k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $k'(x) = 1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$

avec $\ln(1+x) > 0 \iff 1+x > 1 \iff x > 0$

x	-1	0	$+\infty$
$\ln(1+x)$	-	0	+
$k'(x)$	+	0	-
$k(x)$	\nearrow -	0	\searrow -
$f'(x)$	-	$-\frac{1}{2}$	-
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 1	\searrow 0

En -1^+ : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{-\infty}{-1} \rightarrow +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x(1+1/x))}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 0$ car $\ln(x) = o(x)$ en $+\infty$

5. On considère la courbe Γ définie en coordonnées polaires par : $\rho = f(\theta)$.

a) Attention ! On a ici une courbe en polaire.

Quand $\theta \rightarrow +\infty$, on a $\rho = f(\theta) \rightarrow 0$ et donc la courbe "s'enroule" autour de 0 (spirale)

En $\theta = 0$, on a $\rho'(0) = \frac{-1}{2}$ et le coefficient directeur dans le repère mobile $(M, \vec{u}_0, \vec{v}_0) =$

$$(M, \vec{i}, \vec{j}) \text{ est } \frac{\rho(0)}{\rho'(0)} = -2$$

b) On pose $Y(\theta) = \rho(\theta) \cdot \sin(\theta + 1)$.

Quand $\theta \rightarrow -1$: $\rho(\theta) \cdot \sin(\theta + 1) = \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} \sin(\theta + 1)$ est une forme indéterminée.

On se ramène en 0 par $h = \theta - 1$

$$\begin{aligned} \rho(\theta) \cdot \sin(\theta + 1) &= \frac{\ln(h) \sin(h)}{h + 1} \\ &= h \ln(h) \frac{\sin(h)}{h} \frac{1}{h + 1} \end{aligned}$$

et comme $\sin(h) \sim h$ et que $h \ln(h) \rightarrow 0$ (usuelle ou $= \frac{\ln(h)}{1/h}$ et $\ln(h) = o\left(\frac{1}{h}\right)$) alors

$$\boxed{\rho(\theta) \cdot \sin(\theta + 1) \rightarrow 0}$$

et Γ admet une asymptote d'équation $y = 0$ dans le repère mobile (u_{-1}, v_{-1})

$$\boxed{\text{donc } \Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } y = -\tan(1)x \text{ lorsque } \theta \rightarrow -1}$$

c) On trace le point et la tangente pour $t = 0$, l'asymptote pour $t \rightarrow -1$, on enroule la courbe quand $\theta \rightarrow +\infty$ et on respecte le signe de ρ

PARTIE II :

Dans la suite. on s'intéressera à l'intégrale suivante $\int_0^1 f(t) dt$.

On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.

Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes

$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n}$$

et $Q_n(X) = X - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^3}{3^2} - \frac{X^4}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n^2}$

1. Comme f est continue sur $[0, 1]$ l'intégrale est bien définie.

2. $\forall t \in [0, 1], \quad 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - -t} = \frac{1 - (-1)^n t^n}{1 + t}$ car $-t \neq 1$

3. L'égalité étant vraie pour tout $t \in [0, x]$, car $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1 + t} dt &= [\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt \text{ d'une part} \\ &= \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} dt \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n \right]_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ &= P_n(x) \text{ d'autre part} \end{aligned}$$

et donc $\forall x \in [0, 1], \quad P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$

4. Pour majorer l'intégrale, on majore son contenu.

Et on fait d'abord disparaître la valeur absolue :

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \text{ car bornes croissantes}$$

et $\frac{1}{1+t} \leq 1$ pour tout $0 \leq t \leq x$ donc $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ et (bornes croissantes) $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} x^n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad |R_n(x)| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

5. Pour tout $x \in]0, 1]$: $Q'_n(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{P_n(x)}{x}$

donc $\text{pour tout } x \in]0, 1] : Q'_n(x) = \frac{P_n(x)}{x}$

6. En notant g_n l'application définie pour tout $x \in]0, 1]$ par $g(x) = \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$.

Comme $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ ainsi que $\frac{P_n(x)}{x} \rightarrow 1$, alors $g_n(x) \rightarrow 0$ et g_n est continue en 0 et donc sur $[0, 1]$

$Q'_n(x) = \frac{P_n(x)}{x}$ donc Q_n est une primitive de $x \rightarrow \frac{P_n(x)}{x}$ et 1 si $x = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n(t) dt &= \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t} dt - \int_0^1 f(t) dt \\ &= [Q_n(t)]_{t=0}^1 - L \\ &= Q_n(1) - Q_0(0) - L \\ &= Q_n(1) - L \end{aligned}$$

puis on enchaîne les inégalités :

$$|Q_n(1) - L| = \left| \int_0^1 g_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 |g_n(x)| dx \text{ car } 0 \leq 1$$

reste à majorer $|g_n(x)|$ pour majorer ensuite l'intégrale :

On reprend la 3) : $P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$. donc

$$P_n(x) - \ln(1+x) = - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt. \text{ et } \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{1}{x} R_n(x)$$

Donc $|g_n(x)| = \left| \frac{P_n(x) - \ln(1+x)}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} R_n(x) \right| \leq \frac{1}{x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^n}{n+1}$ d'après le 4) et comme les bornes sont $0 \leq 1$ croissantes

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

On a donc $0 \leq |Q_n(1) - L| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ et par encadrement $|Q_n(1) - L| \rightarrow 0$ et $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(1) = L}$

7. $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} si $|Q_N(1) - L| \leq 10^{-4}$ donc si $\frac{1}{(N+1)^2} \leq 10^{-4}$

$\boxed{\text{La valeur approchée est donc atteinte pour } N = 99}$

PARTIE III :

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ et comme, $1+x > 0$ et $x \neq 0$, f est indéfiniment dérivable $]0, +\infty[$ par opérations.

2. $f'(x) = \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{k(x)}{x^2(1+x)}$ Solution : $-\frac{1}{x^2} \frac{x - (\ln(x+1))(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2}{x^3} \frac{x - (\ln(x+1))(x+1)}{x+1}$

$\frac{1}{x^2} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ donc (on regroupe les termes en $\ln(1+x)$ pour répondre à la question suivante)

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{k'(x)x^2(1+x) - k(x)[2x(1+x) + x^2]}{x^4(1+x)^2} \text{ factorisé par } x \\
 &= x \frac{-\ln(1+x)x(1+x) - [x - (1+x)\ln(1+x)][2(1+x) + x]}{x^4(1+x)^2} \\
 &= \frac{-x\ln(1+x)(1+x) - [x - (1+x)\ln(1+x)][2+3x]}{x^3(1+x)^2} \\
 &= \frac{(-x+2+3x)\ln(1+x)(1+x) - x(2+3x)}{x^3(1+x)^2} \\
 &= \frac{(2+2x)\ln(1+x)}{x^3(1+x)} - \frac{2+3x}{x^2(1+x)^2} \\
 &= 2 \frac{\ln(1+x)}{x^3(1+x)} - \frac{2+3x}{x^2(1+x)^2}
 \end{aligned}$$

3. Par récurrence.

Cependant, pour $n=1$, la relation n'est pas évidente.

On redérive f en le considérant comme un produit.

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x} \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

donc avec $T_1(x) = 1$ polynôme et $a_1 = -1$ on a bien $f^{(1)}(x) = \frac{T_1(x)}{(1+x)^1 x^1} + a_1 \frac{\ln(1+x)}{x^{1+1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} \text{ alors}$$

, et ensuite, on dérive $x^n(1+x)^n = [x(1+x)]^n$ comme une puissance au dénominateur alors f

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= \frac{T_n'(x)}{(1+x)^n x^n} + T_n \frac{-n}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} + a_n \frac{1}{1+x} \frac{1}{x^{n+1}} - (n+1) a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}} \\
 &= \frac{x(1+x)T_n'(x) - n(1+2x)T_n + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} - (n+1) a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}
 \end{aligned}$$

et avec $T_{n+1}(x) = x(1+x)T_n'(x) - n(1+2x)T_n + a_n(1+x)^n$ qui est polynôme à coefficient réel et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ on a le résultat voulu.

Donc pour tout entier n : $f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$ avec T_n un polynôme

4. Pour $n=1$ on a $a_1 = -1$ entier et $T_1 = 1$ à coefficients entiers.

Soit n tel que a_n entier et T_n à coefficients entiers alors

T_n' , et $(1+x)^n$ seront à coefficients entier, donc $T_{n+1}(x) = x(1+x)T_n'(x) - n(1+2x)T_n + a_n(1+x)^n$ également.

(on aura $a_n = (-1)^n n!$)

tous les coefficients de T_n sont des entiers.

5. C'est la question costaude !

Pour utiliser la formule de Leibniz, on regarde f comme un produit :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) \text{ avec } g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \ln(1+x)$$

dont on calcule les dérivées successives : $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$: $g^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$: $g^{(3)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{x^4}$ et on a

par récurrence : $g^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$h'(x) = \frac{1}{1+x}$: $h^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$: $h^{(3)}(x) = \frac{+2}{(1+x)^3}$ et $h^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$ pour $n \geq 1$ par récurrence ($n = 0$ est à traiter à part)

On a alors

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{n} \ln(1+x) \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(1+x)^k} \frac{(n-k)!(-1)^{n-k}}{x^{n-k+1}} \end{aligned}$$

on fait apparaître le dénominateur voulu et on simplifie les différentes factorielles avec $\binom{n}{k}$ puis on sort les constantes de la somme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \frac{n! (k-1)! (n-k)! (1+x)^{n-k} x^{k-1}}{k! (n-k)! (1+x)^n x^n} \\ &= \frac{1}{(1+x)^n x^n} (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (1+x)^{n-k} x^{k-1} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } T_n(x) = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (1+x)^{n-k} x^{k-1}$$

et pour $n = 2$: $T_2(x) = -2 \left((1+x)^1 + \frac{1}{2}x \right) = -2 - 3x$ cohérent

SECOND PROBLEME :

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire (qui vérifient la relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M$ (1)

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

0.1 PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. ${}^tA = A$ donc ${}^tA A = A^2 = A {}^tA$
et de même ${}^tC = -C$ donc ${}^tC C = -C^2 = C {}^tC$ et les matrices A et C vérifient la relation (1)

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc, pour n pair on a $A^n = I$ et pour n impair, $A^n = A$
pour tout, entier naturel non nul n , A^n vérifie la relation (1).

3. Comme $A^2 = I$ alors A est inversible et $A^{-1} = A$

Soit u l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est A .

4. Comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $u(\vec{i}) = 0\vec{i} + 1\vec{j} = \vec{j}$ et de même $u(\vec{j}) = \vec{i}$

u est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 et comme $A^2 = I$ alors $u^2 = \text{Id}$ es u est une symétrie

$$u(\vec{v}) = \vec{v} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff x = y$$

les vecteurs invariants sont donc $\{y\vec{i} + y\vec{j} / y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. $U = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est symétrique donc ${}^tU U = U^2 = U {}^tU$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2U$$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U^n = 2^{n-1}U$

ou directement : $U^{n+1} = U^{n-1}U^2$ si $n - 1 \geq 0$ et $U^{n+1} = 2U^n$ suite géométrique matricielle de premier terme U^1 donc $U^n = 2^{n-1}U^1$

On aura ${}^tU^n = 2^{n-1}{}^tU = 2^{n-1}U = 2^{n-1}U$ et donc ${}^tU^n U^n = 2^{2n-2}U = U^n {}^tU^n$

et U^n vérifie (1) pour tout entier $n \geq 1$ et pour $n = 0$

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. On a $V = A + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^tV = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } {}^tV V = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } V {}^tV = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc $A + C \notin E_2$

Donc $+$ n'est pas une loi interne à E_2 et E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

7. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$${}^tM M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M {}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } M \in E_2 \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = \pm b \\ ab + cd = ac + bd \end{cases}$$

$$\iff \text{ou bien (1) } \{c = b \text{ ou bien } \begin{cases} c = -b \\ ab - bd = -ba + bd \end{cases} \iff \begin{cases} c = -b \\ b(a - d) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{et (2) } \iff c = b = 0 \text{ (qui est contenu dans (1)) ou } \begin{cases} c = -b \\ a = d \end{cases}$$

Les solutions sont donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ matrice symétrique ou $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

8. Les solutions sont donc ou bien $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ famille génératrice et libre (échelonnée)

$$\text{une base en est donc } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{ou bien } \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ dont une base est } (I, C)$$

9. On en essaye et on tombe sur $UC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui n'est ni dans le premier ni dans le second des sous espaces composant E_2

Donc E_2 n'est pas stable pour \times

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de \mathbb{R}^3 que l'on note $\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^3 vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$, $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base \mathcal{B}'

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_3 .

1. On récupère les coordonnées des images : et on a donc $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et on remarque que $S^2 = -{}^tS$ et ${}^tS^2 = -{}^t{}^tS = -S$

donc $S {}^tS = -S^3 = {}^tS S$ et $S \in E_3$ et comme ${}^tS^2 S^2 = -S^3 = S^2 {}^tS^2$ donc $S^2 \in E_3$ également

3. Pour tous réels a, b et c , soit $R = aI_3 + bS + cS^2$ alors ${}^tR = aI - bS^2 - cS$ donc

$$R {}^tR = (aI_3 + bS + cS^2)(aI - bS^2 - cS) = \dots$$

$${}^tR R = (aI - bS^2 - cS)(aI_3 + bS + cS^2) = \dots$$

Comme chacun des produit croisé commute, on a donc $R {}^tR = {}^tR R$ et $R \in E_3$

4. L'ensemble $F = \{aI_3 + bS + cS^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(I_3, S, S^2)$ est donc un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 contenu dans E_3

(I, S, S^2) en est génératrice.

Si $aI_3 + bS + cS^2 = 0$ alors $\begin{pmatrix} a & b & -c \\ c & a & b \\ -b & c & a \end{pmatrix} = 0$ et $a = b = c = 0$ (famille échelonnée)

Donc (I, S, S^2) est une base de $F \subset E_3$

5. Dans le produit de deux matrices de F on trouve une combinaison de produits de I_3, S , et S^2 donc on trouve, I_3, S, S^2, S^3 et S^4

$$\text{Et comme } S^3 = SS^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

et donc $S^4 = -S$, le produit de deux matrices de F est donc une combinaison de I_3, S , et S^2 : une matrice de F

F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de \mathbb{R}^4 que l'on note $\mathcal{B}'' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$

$$\text{On définit la matrice } B \text{ par : } B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^4 tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}''}(u) = B$
L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

$$1. B^t B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 3 & 0 & 0 & a + 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a + 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } {}^t B B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a + 1 & 0 & 0 \\ a + 1 & a^2 + 1 & a - 1 & a + 1 \\ 0 & a - 1 & 2 & 0 \\ 0 & a + 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \in E_4 \iff \begin{cases} a^2 + 3 = 4 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \iff a = -1 \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est symétrique}$$

$$2. (x, y, z, t) \in \ker(u) \iff u(x, y, z, t) = 0 \text{ et sur leurs coordonnées : } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} =$$

$$0 \iff \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -x + t = 0 \\ x - t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y + z + 2t = 0 \\ x = t \\ 0 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 0 \\ x = t \\ 0 = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Donc $\ker(u) = \text{Vect}((0, 1, 1, 0))$ et $(0, 1, 1, 0)$ est génératrice et libre (un vecteur non nul) de $\ker(u)$ est une base de $\ker(u)$

Méthode basique : les 4 colonnes (images des vecteurs de la base canonique) engendrent $\text{Im}(u)$,

En notant les vecteurs=coordonnées en colonne :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et avec } \begin{cases} C_2 + C_1 \rightarrow C_2 \\ C_3 - C_1 \rightarrow C_3 \end{cases}$$

$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ échelonnée donc libre et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de

$\text{Im}(u)$

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(u)) = 3$

(C_1, C_2, C_3) sont libres : si $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ alors

$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \alpha = \gamma \\ 4\alpha = 0 \end{cases}$ d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre de trois vecteurs

de $\text{Im}(u)$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im}(u)$

3. Pour calculer $u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$, on passe par les coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc, avec $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4$ on a $u(\vec{x}) = -2\vec{x}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$ et on admet sans démonstration que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^4

On a vu que $\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \in \ker(u)$, donc $u(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{0}$ et $u(\vec{y}) = -2\vec{y}$,

et d'après les calculs sur les coordonnées (= les vecteurs) précédentes : $u(\vec{z}) = 2\vec{z}$ et $u(\vec{t}) = 2\vec{t}$

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \Delta \text{ et avec } P = \text{mat}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Et d'après la formule de changement de base

$$B = \text{mat}_{\mathcal{B}''}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{C}) \text{mat}_{\mathcal{C}}(u) \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}'') = P\Delta P^{-1}$$

6. Par récurrence $B^1 = P\Delta P^{-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^n = P\Delta^n P^{-1}$ alors $B^{n+1} = B^n B = P\Delta^n P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta^{n+1} P$

Comme $2^{2p} = (-2)^{2p} = 4^p$ on a $\Delta^{2p} = 4^{p-1}\Delta^2$ et $\boxed{B^{2p} = 4^{p-1}B^2 \text{ et } B^{2p+1} = 4^p B}$