CCP, 2010, MP, Mathématiques II.

(4 pages)

Partie I

1. $\diamond$ On a $A^2 = 0$ donc $\forall k \geqslant 2,\ A^k = 0$ donc $\exp(A) = I_2 + A$ soit $\underline{\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

$\diamond$ $B = {}^tA$ et l'application $M \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme d'un epace vectoriel de dimension fine donc continue. Ainsi $\exp({}^tA) = {}^t(\exp(A))$ donc $\underline{\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

$\diamond$ On a donc directement $\underline{\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

$\diamond$ Soit $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $C^2 = I_2$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ C^{2k} = I_2$ et $C^{2k+1} = C$ donc $\exp(C) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!}\right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\right) C = \operatorname{ch} 1\, I_2 + \operatorname{sh} 1\, C$ donc $\underline{\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix}}$.

2. $\diamond$ Si on veut rester dans le cadre du programme, on peut utiliser le fait que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp((s+t)M) = \exp(sM)\exp(tM).$$

Ainsi une condition suffisante est $\underline{\exists\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists\, (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ A = tM,\ B = sM}$.

$\diamond$ Une condition suffisante usuelle (mais qui n'est pas explicitement au programme) est $\underline{AB = BA}$.

Remarquons que cette condition n'est pas nécessaire: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ bien que $AB \neq BA$.

Partie II

3. $\diamond$ Si $P \in \operatorname{Ker}\phi$ alors $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_r) = 0$ donc P admet r racines distinctes. Or $\deg(P) \leqslant r - 1$ donc ceci implique que $P = 0$. Comme $0 \in \operatorname{Ker}\phi$, on a $un \operatorname{Ker}\phi = \{0\}$.

$\diamond$ Ainsi ϕ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$. Mais $\dim\big(\mathbb{R}_{r-1}[X]\big) = \dim\big(\mathbb{R}^r\big)$ donc ϕ est une bijection. Tout élément de $\mathbb{R}^r$ admet donc un unique antécédent par ϕ et c'est notamment le cas pour $\big(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_r}\big)$.

Ainsi $\underline{\text{il existe un unique polynôme } L \in \mathbb{R}_{r-1}[X] \text{ tel que } \forall i \in [\![1, r]\!],\ L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}}$.

4. (a) On a facilement $\underline{l_i(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}}$.

(b) Si L s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\left(l_i\right)_{i\in[\![1,r]\!]}$: $L=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i l_i$ alors $\forall j\in[\![1,r]\!],\ \mathrm{e}^{\lambda_j}=L(\lambda_j)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i l_i(\lambda_j)=\alpha_j$ selon [**a**]. Réciproquement, le polynôme $P=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^{\lambda_i}l_i$ vérifie $\forall j\in[\![1,r]\!],\ P(\lambda_j)=\mathrm{e}^{\lambda_j}$ et $P\in\mathbb{R}_{r-1}[X]$ donc $P=L$. Ainsi $\underline{L=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^{\lambda_i}l_i}$.

5. **(a)** Toute application linéaire de source un espace vectoriel de dimension finie et de but un espace vectoriel normé quelconque est continue. Donc, ici, $\underline{M\mapsto PMP^{-1}\text{ est continue}}$.

(b) Par récurrence immédiate, $\forall k\in\mathbb{N},\ \left(PDP^{-1}\right)^k=PD^kP^{-1}$ donc, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N}\frac{\left(PDP^{-1}\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{PD^kP^{-1}}{k!}=P\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{D^k}{k!}\right)P^{-1}$. Par définition, le premier membre tend quand N tend vers $+\infty$ vers $\exp\left(PDP^{-1}\right)$ tandis que le second tend quand N tend vers $+\infty$ vers $P\exp(D)P^{-1}$ grâce à la continuité de $M\mapsto PMP^{-1}$ car $\sum_{k=0}^{N}\frac{D^k}{k!}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\exp(D)$. Donc $\underline{\exp\left(PDP^{-1}\right)=P\exp(D)P^{-1}}$.

6. Puisque A est diagonalisable, il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D=\mathrm{Diag}\left(\mu_1,\ldots,\mu_n\right)$ telles que $A=PDP^{-1}$. On a alors,par récurrence immédiate, $\forall k\in\mathbb{N},\ D^k=\mathrm{Diag}\left(\mu_1^k,\ldots,\mu_n^k\right)$ donc, pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, $P(D)=\mathrm{Diag}\left(P(\mu_1),\ldots,P(\mu_n)\right)$. Ainsi, d'une part, $\forall N\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{N}\frac{D^k}{k!}=\mathrm{Diag}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\mu_1^k}{k!},\ldots,\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_n^k}{k!}\right)$ et donc $\exp(D)=\mathrm{Diag}\left(\mathrm{e}^{\mu_1},\ldots,\mathrm{e}^{\mu_n}\right)$ et, d'autre part, $L(D)=\mathrm{Diag}\left(L(\mu_1),\ldots,L(\mu_n)\right)=\mathrm{Diag}\left(\mathrm{e}^{\mu_1},\ldots,\mathrm{e}^{\mu_n}\right)$ car chaque μ_j appartient à $\mathrm{Sp}(A)=\left\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right\}$.
Donc $\exp(A)=\exp\left(PDP^{-1}\right)=P\exp(D)P^{-1}=PL(D)P^{-1}$. Or, comme au [**5.b**], on a $L\left(PDP^{-1}\right)=PL(D)P^{-1}$ donc $\underline{\exp(A)=L(A)}$.

7. Par récurrence immédiate, on a $\forall k\in\mathbb{N},\ v^k(x)=\lambda^k x$ donc, si $P=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kX^k$, $P(v)(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kv^k(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\lambda^k x=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\lambda^k\right)x$ soit $\underline{P(v)(x)=P(\lambda)x}$.

8. **(a)** Tout x de E s'écrit $x=\sum_{j=1}^{r}x_j$ avec $x_j\in E_j$ donc

$$l_i(v)(x)=\sum_{j=1}^{r}l_i(x_j)\underset{[\mathbf{7}]}{=}\sum_{j=1}^{r}l_i(\lambda_j)x_j\underset{[\mathbf{4.a}]}{=}x_i$$

donc $\underline{p_i=l_i(v)\text{est le projecteur sur }E_i,\ \text{parallèlement à }\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}E_k}$.

(b) On a donc $\exp(A)\underset{[\mathbf{6}]}{=}L(A)\underset{[\mathbf{4.b}]}{=}\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^{\lambda_i}l_i(A)=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^{\lambda_i}l_i\left(\mathrm{Mat}\left(v,\mathcal{B}\right)\right)=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^{\lambda_i}\mathrm{Mat}\left(l_i(v),\mathcal{B}\right)$ ce qui donne avec [**a**], $\underline{\exp(A)=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^{\lambda_i}\mathrm{Mat}\left(p_i,\mathcal{B}\right)}$.

Partie III

9. Si u était diagonalisable, son polynôme minimal aurait des racines simples. Donc $\underline{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

10. Prenons $\underline{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$: on a $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$ donc $\pi_A(X) = (X-1)^m(X-2)$ avec $1 \leqslant m \leqslant 2$. Mais $E_1(A) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable donc $m \neq 1$ et A répond à la question.

11. Puisque $\pi = (X-1)^2(X-2)$ est annulateur pour u, on a $E = \operatorname{Ker}\big[\pi(u)\big] = \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2 \circ (u - 2\mathrm{id})\big]$. Or $(X-1)^2$ et $X-2$ sont premiers entre eux donc le théorème de décomposition des noyaux donne $\underline{E = \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big] \oplus \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]}$.

12. $(u-\mathrm{id})^2 + u \circ (2\mathrm{id} - u) = (u^2 + 2u + \mathrm{id}) + (2u - u^2)$ soit $\underline{p + q = \mathrm{id}}$.

13. $\diamond$ Selon [**11**], tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]$. On a alors

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) + (\mathrm{id} - q)(x_2) = (u-\mathrm{id})^2(x_1) + x_2 + u \circ (u - 2\mathrm{id})(x_2) = 0_E + x_2 + 0_E$$

donc $p(x) = x_2$. Donc $\underline{p \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big], \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]}$.

$\diamond$ $q(x) = x - p(x) = x_1$ donc $\underline{q \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big], \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]}$.

14. (a) $\forall x \in E,\ p(x) \in \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]$ donc $\underline{\forall x \in E,\ (u - 2\mathrm{id})(p(x)) = 0_E}$.

(b) La démonstration vue à la question [**7**] donne $\forall x \in E,\ u^k(p(x)) = 2^k p(x)$ donc $\underline{u \circ p = 2^k p}$.

(c) Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{u^k}{k!}\right) \circ p = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{u^k \circ p}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{2^k p}{k!} = \left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{2^k}{k!}\right) p$. Or l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $v \mapsto v \circ p$ est continue car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. De même, l'application linéaire $t \mapsto tp$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$. En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient $\underline{\exp(u) \circ p = \mathrm{e}^2\, p}$.

15. $\diamond$ $\forall x \in E,\ q(x) \in \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$ donc $\forall k \geqslant 2,\ (u-\mathrm{id})^k(q(x)) = (u-\mathrm{id})^{k-2}\big[(u-\mathrm{id})^2(q(x))\big] = (u-\mathrm{id})^{k-2}(0_E) = 0_E$ donc $\underline{\forall k \geqslant 2,\ (u-\mathrm{id})^k \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

$\diamond$ **Méthode 1:** *en utilisant le résultat hors-programme :* $\big(v \circ w = w \circ v\big) \Rightarrow \big(\exp(v + w) = \exp(v) \circ \exp(w)\big)$.

Ainsi $\forall N \geqslant 2$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(u-\mathrm{id})^k}{k!}\right) \circ q = q + (u - \mathrm{id}) \circ q = u \circ q$ donc, comme au [**14.c**], en passant à la limite $\exp(u - \mathrm{id}) \circ q = u \circ q$. D'autre part, le résultat du [**8**] s'applique à l'identité et donc $\exp(\mathrm{id}) = \mathrm{e}^1\,\mathrm{id}$. Comme id et $u - \mathrm{id}$ commutent, on a $\exp(u) \circ q = \exp(\mathrm{id} + u - \mathrm{id}) \circ q = \exp(\mathrm{id}) \circ \exp(u - \mathrm{id}) \circ q = u \circ q = \mathrm{e}\,\mathrm{id} \circ u \circ q$ donc $\underline{\exp(u) \circ q = \mathrm{e}\, u \circ q}$.

Méthode 2: *en restant dans le cadre du programme .*

Effectuons la division euclidienne de X^k par $(X-1)^2$: $X^k = Q_k(X)(X-1)^2 Q_k(X) + a_k X + b_k$. En appliquant en 1, on a $1 = a_k + b_k$ et en prenant la dérivée en 1, on trouve $k = a_k$. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \circ q = \big[Q_k(u) \circ (u - \mathrm{id})^2 + k\, u + (1-k)\,\mathrm{id}\big] \circ q = Q_k(u) \circ (u-\mathrm{id})^2 \circ q + k\, u \circ q + (1-k)\, q = k\, u \circ q + (1-k)\, q$ donc

$$\exp(u) \circ q = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}\right) u \circ q + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-k}{k!}\right) q = \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\right) u \circ q + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\right) q = \mathrm{e}\, u \circ q.$$

16. Ainsi $\exp(u) = \exp(u) \circ \mathrm{id} = \exp(u) \circ (p+q) = \exp(u) \circ p + \exp(u) \circ q = \mathrm{e}^2\, p + \mathrm{e}\, u \circ q$ et les résultats précédents donnent $\underline{\exp(u) = \mathrm{e}^2\,(u - \mathrm{id})^2 - \mathrm{e}\, u^2 \circ (u - 2\mathrm{id})}$.

Partie IV

17. $\underline{\mathrm{d}(x,F) = \big\|x - p_F(x)\big\|}$.

18. $\left(\dfrac{n}{\|n\|}\right)$ est une base orthonormée de $H^\perp$ donc $p_{H^\perp}(x) = \left\langle \dfrac{n}{\|n\|}, x \right\rangle \dfrac{n}{\|n\|} = \dfrac{\langle n, x\rangle}{\|n\|^2}\, n$ et $x - p_H(x) = p_{H^\perp}(x)$ donc $\underline{\mathrm{d}(x,H) = \dfrac{|\langle n, x\rangle|}{\|n\|}}$.

19. (a) $\diamond$ Tr est une forme linéaire non nulle et $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ donc $\underline{H \text{est un hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\diamond$ $M \in H \iff \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}({}^tI_n M) = \langle I_n, M\rangle = 0$ donc $H = \{I_n\}^\perp$ et donc $H^\perp = \left(\{I_n\}^\perp\right)^\perp$ soit $\underline{H^\perp = \mathbb{R}.I_n}$.

(b) La formule du [**18**] donne donc $\underline{\mathrm{d}(x,H) = \dfrac{|\mathrm{Tr}(M)|}{\sqrt{n}}}$.

20. $\diamond$ $y \in F$ si et seulement si $\exists\, t \in \mathbb{R},\ y = (t,0)$ donc $N_\infty(x-y) = \mathrm{Max}\,(|1-t|, 1)$. Donc $\forall y \in F,\ N_\infty(x-y) \geqslant 1$ et $N_\infty(x - (1,0)) = 1$ donc $\underline{\mathrm{d}_\infty(x,F) = 1}$.

$$\diamond\ \Big(m \in F \text{ et } N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\Big) \iff \Big(\exists\, t \in \mathbb{R},\ m = (t,0) \text{ et } \mathrm{Max}\,(|1-t|,1) = 1\Big)$$
$$\iff \Big(\exists\, t \in \mathbb{R},\ m = (t,0) \text{ et } |1-t| \leqslant 1\Big)$$
$$\iff \Big(\exists\, t \in [0,2],\ m = (t,0)\Big)$$

donc $\underline{\big\{m \in F \mid N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\big\} = [0,2] \times \{0\}}$.

$\diamond$ On peut remarquer que, contrairement au cas euclidien, la distance est atteinte en plusieurs vecteurs $m \in F$. Si on veut en dire un peu plus, on peut remarquer que pour une norme N quelconque dans un espace de dimension finie

$$\big\{m \in F \mid N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\big\} \text{ est une partie non vide, convexe et compacte de } F.$$

En effet, posons $d = \mathrm{d}_\infty(x,F)$ et $\mathcal{C} = \big\{m \in F \mid N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\big\}$, on a:

- $d \leqslant N(x - 0_E)$ car $0_E \in F$ donc $d = \mathrm{Inf}\big\{N(x-y) \mid y \in F \cap B(x, N(x))\big\}$ et, comme $y \mapsto N(x-y)$ est continue sur E et que $F \cap B(x,N(x))$ est un compact en tant qu'intersection de F fermé et de $B(x,N(x))$ compact, cette borne inférieure et atteinte ce qui montre $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
- $\mathcal{C} = F \cap S(x,d)$ est un compact, comme ci-dessus en tant qu'intersection de F fermé et de $S(x,d)$ compact.
- Si $(m_1, m_2) \in \big(\mathcal{C}\big)^2$ et $\alpha \in [0,1]$, on a $m_3 = \alpha\, m_1 + (1-\alpha) m_2 \in F$ et

$$d \leqslant N\big[x - m_3\big] = N\big[\alpha(x-m_1) + (1-\alpha)(x-m_2)\big] \leqslant \alpha N\big[x-m_1\big] + (1-\alpha) N\big[x - m_2\big] = d$$

donc $\alpha m_1 + (1-\alpha) m_2 \in \mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}$ est convexe.

Dans le cas où F est une droite, $\mathcal{C}$ est donc un segment.

* * *
* *
*