A. Opérateur de Volterra

1) On a $V(f)' = f$ et $V^*(f)' = -f$

Par intégration par parties

$< V(f), g >= -[V(f)V^*(g)]_0^{\pi/2} + \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)V^*(g)(t)dt =< f, V^*(g) >$. car $V(f)(0) = V^*(g)(\pi/2) = 0$.

2) Soient $f, g \in E$, par application de 1) et que $<,>$ est un produit scalaire on obtient :

$< V^* \circ V(f), g >=< g, V^* \circ V(f) >=< V(g), V(f) >=< V(f), V(g) >=< f, V^* \circ V(g) >$. Donc $V^* \circ V$ est un endomorphisme symétrique.

De plus $< V^* \circ V(f), f >=< V(f), V(f) >= \left\| V(f) \right\|$ qui est positive, et si on suppose que $< V^* \circ V(f), f >= 0$, alors $V(f)$ est nulle, donc $V(f)' = f = 0$, alors $V^* \circ V$ est défini positif.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ qui existe car elle est symétrique, il existe alors f non nulle de E telle que $V^* \circ V(f) = \lambda f$, alors :

$< V^* \circ V(f), f >=< \lambda f, f >= \lambda < f, f >$.

Comme les deux quantités $< V^* \circ V(f), f >$ et $< f, f >$ sont strictement positif, alors $\lambda > 0$.

3) On a alors $V^* \circ V(f)(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.

Comme $V^* \circ V(f_\lambda)$ est $\mathscr{C}^1$ et $(V^* \circ V(f_\lambda))' = -(V(f_\lambda))$ et puisque $V(f_\lambda)$ est $\mathscr{C}^1$ aussi et $V(f_\lambda)' = f_\lambda$:

alors $f_\lambda = \dfrac{1}{\lambda} V^* \circ V(f)(f_\lambda)$ est $\mathscr{C}^2$ et $\lambda f_\lambda'' = -f_\lambda$.

De plus $V^* \circ V(f)(\pi/2) = 0$ et que $V(f)(0) = 0$, alors $f_\lambda(\pi/2) = f_\lambda'(0) = 0$.

4) D'après la question précédente, si λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ alors f_λ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + \dfrac{1}{\lambda} y & = & 0 \\ y'(\dfrac{\pi}{2}) = y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Réciproquement si f_λ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + \dfrac{1}{\lambda} y & = & 0 \\ y'(\dfrac{\pi}{2}) = y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme $\left(V^* \circ V(f_\lambda)\right)'' = -f_\lambda$, alors $(\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda))'' = 0$

Donc $(\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda))' = cte$, en évaluant en $\dfrac{\pi}{2}$, $cte = 0$

Alors $\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda) = cte$, en évaluant en 0, $cte = 0$, par conséquent $\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda) = 0$

Ainsi λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement si $f_\lambda \in vect(x \rightarrow \cos(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}x), x \rightarrow \sin(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}x))$ et $f_\lambda(\pi/2) = 0 = f'_\lambda(0)$ ceci est équivalent à $f_\lambda \in vect(x \rightarrow \cos(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}x))$ et $f_\lambda(\pi/2) = 0 = f'_\lambda(0)$ si et seulement si $\cos(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\pi}{2}) = 0$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tq $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

et dans ce cas $E_{\frac{1}{(2n+1)^2}} = vect(x \longmapsto \cos((2n+1)x))$ qui est de dimension 1.

B. Théorème d'approximation de Weirstrass

5) Il est évident que $S_n(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ et que S_n suit une loi binômiale de paramètres (n, x), alors $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $P(S_n = k) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

l'espérance est linéaire donc $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = nx$, et $V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ car les X_k sont mutuellement indépendantes, donc $V(S_n) = nx(1-x)$.

6) On $\sum\limits_{\substack{0 \le k \le n \\ |\frac{k}{n} - x| \ge \alpha}} x^k (1-x)^{n-k} = P(\bigcup\limits_{\substack{0 \le k \le n \\ |\frac{k}{n} - x| \ge \alpha}} (S_n = k))$

Soit $\omega \in \Omega$, alors :

$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcup_{\substack{0 \le k \le n \\ |\frac{k}{n} - x| \ge \alpha}} (S_n = k) \quad &\Longrightarrow \quad \exists k \in \{0, 1, ..., n\},\ S_n(\omega) = k \ \ et \ \ |\frac{k}{n} - x| \ge \alpha \\
&\Longrightarrow \quad |\frac{S_n(\omega)}{n} - x| \ge \alpha \\
&\Longrightarrow \quad \omega \in (|\frac{S_n}{n} - x| \ge \alpha)
\end{aligned}$$

Donc $\bigcup\limits_{\substack{0 \le k \le n \\ |\frac{k}{n} - x| \ge \alpha}} (S_n = k) \subset (|\dfrac{S_n}{n} - x| \ge \alpha)$, donc

$P(\bigcup\limits_{\substack{0 \le k \le n \\ |\frac{k}{n} - x| \ge \alpha}} (S_n = k)) \le P(|\dfrac{S_n}{n} - x| \ge \alpha)$

Or $P(|\frac{S_n}{n}-x|\geq\alpha)=P(|S_n-nx|\geq n\alpha)=P(|S_n-E(S_n)|\geq n\alpha)\leq\frac{V(S_n)}{n^2\alpha^2}$ c'est d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchibychev.
Mais $\frac{V(S_n)}{n^2\alpha^2}=\frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}\leq\frac{1}{4n\alpha^2}$ alors l'inégalité demandée.

7) D'une part $f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}f(x)$, car $(S_n=k)_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements, alors : $B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}f(\frac{k}{n})$
Et $E(S_n)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kx^k(1-x)^{n-k}$, donc : $E(\frac{S_n}{n})=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}P(S_n=k)$
Par application du théorème de Transfert, on a :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P(S_n=k)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=B_n(f)(x)$$

Donc
$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\left(f(\frac{k}{n})-f(x)\right)$$

f est continue sur le segment $[0,1]$ donc uniformément continue, alors pour $\epsilon>0$, $\exists\alpha>0$ tq $|x-y|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}$.
D'autre part si on considère
$I=\left\{k\in\{0,1,...,n\}\ /\ |\frac{k}{n}-x|<\alpha\right\}$ et $J=\left\{k\in\{0,1,...,n\}\ /\ |\frac{k}{n}-x|\geq\alpha\right\}$, on a $I\bigcup J=\{0,1,...,n\}$ et $I\bigcap J=\emptyset$.
Donc :

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x)-f(x)| &\leq \sum_{k\in I}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}|f(\frac{k}{n})-f(x)|+\sum_{k\in J}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}|f(\frac{k}{n})-f(x)|\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{k\in I}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}|+2\left\|f\right\|_\infty\sum_{k\in J}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}+2\left\|f\right\|_\infty\sum_{k\in J}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}+2\left\|f\right\|_\infty\frac{1}{4n\alpha^2}\end{aligned}$$

Or $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $n\geq N\Longrightarrow|2\left\|f\right\|_\infty\frac{1}{4n\alpha^2}|\leq\frac{\epsilon}{2}$
Donc $\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f)(x)-f(x)|\leq\epsilon$ pour tout $n\geq N$, ce qui donne la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur $[0,1]$.

C. Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

8) Soit $m \in \mathbb{N}$, et $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} 2\cos^m t &= (e^{it} + e^{-it})^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k e^{ik} e^{-i(m-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k e^{i(2k-m)} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} 2\cos^m t &= (e^{it} + e^{-it})^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k e^{i(m-k)} e^{-ik} \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k e^{i(m-2k)} \end{aligned}$$

Alors $4\cos^m t = \sum_{k=0}^{m} C_m^k [e^{i(m-2k)} + e^{i(2k-m)}] = 2 \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cos(m-2k)$.

La parité de cos affirme que $t \to \cos^m t \in F_m$

F_n est un sous espace vectoriel, alors $p(\cos) \in F_n$.

9) Pour $n \neq m$, on a :

$< c_n, c_m >= \int_0^{\pi} \cos nt \cos mt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((n+m)t) + \cos((m-n)t)] dt = 0$

et que si $n = m \neq 0$, $< c_n, c_n >= \pi/2$, enfin

si $n = m = 0$, alors $< c_0, c_0 >= \pi$

Alors : $\|c_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pour $n \neq 0$ et $\|c_0\| = \sqrt{\pi}$.

Donc $\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ pour $n \neq 0$ et $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

Alors la suite $(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale.

On a $\forall f \in G$, $\left\| f \right\|_G \leq \sqrt{\pi} \sup_{x \in [0,\pi]} |f(x)|$.

Soit $f \in E$, posons $g = f \circ \arccos$ qui est continue sur $[-1,1]$.

$\varepsilon > 0$, $\exists P$ polynôme tel que $\sup_{x \in [-1,1]} |g(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$

Donc $\sup_{t \in [0,\pi]} |f \circ \arccos(\cos t) - P(\cos t)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$

Alors $\sup_{t\in[0,\pi]} |f\circ \arccos(\cos t) - P(\cos t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$

C'est à dire $\sup_{t\in[0,\pi]} |f(t) - P(\cos t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$,

Donc $\|f - P(\cos)\|_G \leq \varepsilon$, et si $degP = N$, alors d'après la question précédente $P(\cos) \in F_N$.

10) Or $\|f - P_{F_N}(f)\|_G \leq \|f - P(\cos)\|_G$, car $\|f - P_{F_n}(f)\|_G = \inf_{g\in F_n} \|f - g\|_G$.

Mais si $n \geq N$, alors $F_N \subset F_n$.

Donc $\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leq \|f - P_{F_N}(f)\|_G \leq \varepsilon$, ce qui est demandée.

Si $(P_{F_n})_n$ converge uniformément vers g, alors $\|g - P_{F_n}(f)\|_G$ converge vers 0.

Et on a $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ converge vers 0, par unicité de la limite $f = g$.

11) On a $P_{F_n}(g_x) = \sum_{k=0}^{n} < g_x, \alpha_k c_k >_G \alpha_k c_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 < g_x, c_k >_G c_k$.

Reste à calculer

$$\begin{aligned}
< g_x, c_k >_G &= \int_0^{\pi} g_x(t)\cos(kt)(t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)(t)dt + \int_{\pi/2}^{\pi} g_x(t)\cos(kt)(t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)(t)dt - \int_{\pi/2}^{\pi} g_x(\pi-t)\cos(kt)(t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)(t)dt + (-1)^k \int_{\pi/2}^{0} g_x(t)\cos(kt)(t)dt \quad \pi - t = u \\
&= \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)(t)dt - (-1)^k \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)(t)dt \\
&= (1-(-1)^k)\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)(t)dt
\end{aligned}$$

Donc pour $< g_x, c_{2k} >_G = 0$, calculons

$< g_x, c_{2k+1} >= 2(\int_0^x (\pi/2 - x)\cos((2k+1)t)dt + \int_x^{\pi/2} (\pi/2 - t)\cos((2k+1)t)dt)$

On a $\int_0^x (\pi/2 - x)\cos((2k+1)t)dt = (\pi/2 - x)\dfrac{1}{(2k+1)}\sin((2k+1)x)$.

Et $\int_x^{\pi/2} (\pi/2 - t)\cos((2k+1)t)dt = \dfrac{\pi}{2(2k+1)}(\sin((2k+1)\pi/2) - \sin((2k+1)x)) - \int_x^{\pi/2} t\cos((2k+1)t)dt$

Et on a $\displaystyle\int_x^{\pi/2} t\cos((2k+1)t)\,dt = \frac{1}{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\sin((2k+1)x) - x\sin((2k+1)x)\right) + \frac{1}{(2k+1)^2}\left(\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}) - \cos((2k+1)x)\right)$

En rassemblant ces résultats on trouve $< g_x, c_{2k+1} >= \dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$.

Donc $\forall t \in [0,\pi];\quad P_{F_n}(g_x)(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)\cos((2k+1)t)$.

La série $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)\cos((2k+1)t)$ converge normalement, donc uniformément, alors par application de la question 10)

$\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)\cos((2k+1)t) = g_x(t)$ pour tout $t \in [0,\pi]$

En particulier pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

$\dfrac{\pi}{2} - \max(x,t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)\cos((2k+1)t)$

12) On a $(V^* \circ V(f))'' = -f$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}(\frac{\pi}{2} - \max(x,t))f(t)\,dt$. On a

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x (\frac{\pi}{2} - \max(x,t))f(t)\,dt + \int_x^{\pi/2}(\frac{\pi}{2} - \max(x,t))f(t)\,dt \\
&= \int_0^x (\frac{\pi}{2} - x)f(t)\,dt + \int_x^{\pi/2}(\frac{\pi}{2} - t)f(t)\,dt \\
&= (\frac{\pi}{2} - x)\int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{\pi/2}(\frac{\pi}{2} - t)f(t)\,dt
\end{aligned}$$

Donc F est $\mathscr{C}^1$ et $F'(x) = -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + (\frac{\pi}{2} - x)f(x) - (\frac{\pi}{2} - x)f(x) = -\int_0^x f(t)\,dt$

Donc F est $\mathscr{C}^2$ et $F''(x) = -f(x) = (V^* \circ V(f))''$, alors en tenant compte de $F(\pi/2) = V^* \circ V(f)(\pi/2) = 0$ et que $F'(0) = (V^* \circ V(f))'(0) = 0$, donc $F = V^* \circ V(f)$.

La série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)$ converge normalement sur $[0,\pi]$, donc pour tout $x \in [0,\pi]$

$$\begin{aligned} V^*\circ V(f)(x) &= \int_0^{\pi/2}\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)dt \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)f(t)dt \end{aligned}$$

On prend alors $a_n(f) = \dfrac{4}{\pi(2n+1)^2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)f(t)dt$

D. Équations différentielles du type Sturm-liouville

13) $< V^*\circ V(f),\varphi_n >= \dfrac{1}{(2n+1)^2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sum_{m=0}^{+\infty}a_m(f)\cos((2m+1)x)\cos((2n+1)x)dx.$

Mais la série $\sum_{m\geq 0} a_m(f)\cos((2m+1)x)\cos((2n+1)x)$ de fonctions continues converge normalement sur $[0,\pi/2]$ donc :

$$\begin{aligned} < V^*\circ V(f),\varphi_n > &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\sum_{m=0}^{+\infty}a_m(f)\cos((2m+1)x)\cos((2n+1)x)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^{+\infty}a_m(f)\int_0^{\pi/2}\cos((2m+1)x)\cos((2n+1)x)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}a_n(f)\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(2n+1)^2}\int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)f(t)dt \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2}< f,\varphi_n > \end{aligned}$$

14) On a $(V^*\circ V(g))'' = -g$ et $V^*\circ V(h)'' = -h$.

Supposons que g est solution de S, alors $g''-\lambda(V^*\circ V(g))''-(V^*\circ V(h))'' = 0$

Alors $g'-\lambda(V^*\circ V(g))'-(V^*\circ V(h))' = 0$ tenant compte de $(V^*\circ V(g))'(0) = g'(0) = 0$

et alors $g-\lambda(V^*\circ V(g))-(V^*\circ V(h)) = 0$ tenant compte de $(V^*\circ V(g))'(\pi/2) = g(\pi/2) = 0$.

Réciproquement si $g-\lambda(V^*\circ V(g))-(V^*\circ V(h)) = 0$ alors g est $\mathscr{C}^2$ et en dérivant deux fois, on obtient le résultat.

Alors $< g,\varphi_n >= \lambda < V^*\circ V(g),\varphi_n > + < V^*\circ V(h),\varphi_n >$, donc

$< g,\varphi_n >= \lambda \dfrac{1}{(2n+1)^2} < g,\varphi_n > + \dfrac{1}{(2n+1)^2} < h,\varphi_n >.$

D'où la relation demandée.

Alors

$$\begin{aligned} g &= \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g)\cos((2n+1)t) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(h)\cos((2n+1)t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n(g) + a_n(h))\cos((2n+1)t) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \lambda a_n(g) + a_n(h) &= \lambda \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\pi/2} g(t)\cos((2n+1)t)dt + \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\pi/2} h(t)\cos((2n+1)t \\ &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2} < g,\varphi_n > + \frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2} < h,\varphi_n > \\ &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2} < g,\varphi_n > + \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}) < g,\varphi_n > \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} < g,\varphi_n > \end{aligned}$$

Donc $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos((2n+1)t)\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} < g,\varphi_n >= \sum_{n=0}^{+\infty} < g,\varphi_n > \varphi_n.$

15) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda \neq (2n+1)^2$, alors :

$< g,\varphi_n >= \dfrac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} < h,\varphi_n >$ ceci d'après les relations de la question 14).

$< h,\varphi_n > \varphi_n$ est une fonction bornée sur $[0,\pi]$, donc la série donnée converge normalement sur $[0,\pi]$.

De plus la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} < h,\varphi_n > \varphi_n$ est alors une solution de S.

16) Supposons que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p+1)^2$, alors si $< h,\varphi_p > \neq 0$, l'une des relations de la question 14) tombe en défaut donc S ne possède pas de solution.

Mais si $< h,\varphi_p >= 0$, alors dans ce cas $< g,\varphi_p >$ peut prendre une valeur arbitraire et dans ce cas S possède une infinité de solutions par exemple

$g = \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq p}}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} < h,\varphi_n > \varphi_n.$

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@yahoo.fr