

1 Première Partie

1.

$$(a) \lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = B \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A(k) - B\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \max_{i,j} |a_{i,j}(k) - b_{i,j}| = 0 \Leftrightarrow \forall i, j : \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_{i,j}(k) - b_{i,j}| = 0$$

Ceci est du au fait qu'on a un max, c'est à dire un nombre fini d'éléments.

On a bien sûr la même propriété pour toute suite de matrices ou vecteurs en dimension finie.

$$(b) \lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = B \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)X = BX \text{ car les coordonnées de ces vecteurs sont des combinaisons linéaires identiques des coordonnées de } A(k) \text{ et de } B.$$

$$\text{Réciproquement, en prenant } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et enfin } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient la première colonne de $A(k)$ qui converge vers la première colonne de B , puis la même chose pour la seconde et la troisième.

$$(c) \lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = B \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)C = BC \text{ car les coordonnées de ces matrices sont des combinaisons linéaires identiques des coordonnées de } A(k) \text{ et de } B.$$

La réciproque est évidente en prenant $C = I$.

On a la même propriété à gauche par un raisonnement identique.

$$(d) \text{ Il s'agit simplement de la somme des coefficients correspondants. On aurait d'ailleurs pu faire une combinaison linéaire...}$$

2.

$$(a) \text{ On a } (AB)_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j} \text{ et donc}$$

$$\left| (AB)_{i,j} \right| \leq 3 \max_{i,j} |a_{i,j}| \max_{i,j} |b_{i,j}| \text{ et enfin } \|AB\| \leq 3 \|A\| \|B\|.$$

On montre le résultat suivant par récurrence. L'amorce est évidente pour $k = 1$ car c'est une égalité.

Si on l'admet au rang k ,

$$\|A^{k+1}\| = \|A^k A\| \leq 3 \|A^k\| \|A\| \leq 3 \times 3^{k-1} \|A\|^k \|A\| \leq 3^k \|A\|^{k+1},$$

ce qui termine la récurrence.

$$(b) \text{ Si } A \text{ est inversible, } AA^{-1} = I \text{ et } A^k A^{-k} = I \text{ aussi, au besoin par une récurrence très facile.}$$

De plus, $\|I\| = 1$, d'où

$$1 \leq 3 \|A^k\| \|(A^{-1})^k\| \leq 3 \|A^k\| 3^{k-1} \|A^{-1}\|^k = 3^k \|A^k\| \|A^{-1}\|^k,$$

$$\text{ce qui donne, en prenant la racine } k^{ème}, 1 \leq 3 \|A^k\|^{1/k} \|A^{-1}\|,$$

ce qui est le résultat demandé car tous les nombres sont positifs.

Si A est inversible et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = 0$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 \|A^{-1}\|} = 0$, ce qui est impossible.

3.

$$(a) \quad (I - A) \sum_{i=0}^k A^i = \sum_{i=0}^k A^i - \sum_{i=0}^k A^{i+1} = I - A^{k+1}$$

$$\boxed{(I - A) \sum_{i=0}^k A^i = I - A^{k+1}}$$

(b) C'est la propriété déjà vue au **1.b.** qui commence la question.

On a donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} (I - A) \sum_{i=0}^k A^i = I$, ce qui prouve que $(I - A) \sum_{i=0}^k A^i$ est inversible à partir d'un certain rang car son déterminant tend vers 1 et finit par être non nul. D'où $(I - A)$ est inversible et

$$(I - A) \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k A^i = I, \text{ c'est à dire } (I - A)^{-1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k A^i,$$

$$\boxed{(A - I)^{-1} = - \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k A^i}$$

$$\text{Enfin, } \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} A^i = (I - A)^{-1}}$$

4. Le premier résultat est celui de la question **1.c.** et le second résultat est le même en utilisant $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$, résultat très classique qui se montre encore au besoin par récurrence facile.

5.

(a) Soit λ, X un couple valeur propre, vecteur propre de A , $AX = \lambda X$ et facilement, $A^k X = \lambda^k X$ qui a pour limite BX non nul. Ce qui prouve que $\lambda = 1$.

On travaille sur les complexes, le polynôme caractéristique est scindé, 1 est valeur propre triple. Il existe une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient}$$

$$P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha & k\beta + \frac{k(k-1)}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 1 & k\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ par un calcul du type de}$$

la partie **II.**

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P^{-1}A^kP = P^{-1}BP, \text{ ce qui prouve } \alpha = \gamma = 0 \text{ puis } \beta = 0.$$

Ainsi, $P^{-1}AP = I$, $A = I$.

(b) On fait le même calcul qu'au début de la question précédente, mais on ne sait rien sur BX ce qui prouve que $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

(c) A est diagonalisable et les valeurs propres vérifient $|\lambda| < 1$. On a une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix} \text{ de limite nulle. } P^{-1}BP = 0, B = 0.$$

Si on peut avoir $\lambda = 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$ est diagonale, de diagonale formée de 1 et de 0, ce qui assure le résultat.

$$6. A = PBP^{-1}, \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^k \frac{(PBP^{-1})^i}{i!} = \sum_{i=0}^k \frac{PB^iP^{-1}}{i!} = P \left(\sum_{i=0}^k \frac{B^i}{i!} \right) P^{-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} P \left(\sum_{i=0}^k \frac{B^i}{i!} \right) P^{-1} = P \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \frac{B^i}{i!} P^{-1} = P \exp(B) P^{-1}.$$

Ce qui prouve que $\exp(A)$ existe et a la valeur indiquée.

$$\boxed{\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}}$$

2 Deuxième Partie

1.

(a) On ne donne ici que les résultats que toute bonne calculatrice donne.

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2b \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 3b^2 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Q^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}}$$

(b) On utilise $k > 0$

$$\boxed{D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}}$$

Par une récurrence facile à écrire, ou en utilisant le même procédé

$$\text{que pour } Q : \boxed{M^k = \begin{pmatrix} ak & 0 & 0 \\ 0 & b^k & kb^{k-1} \\ 0 & 0 & b^k \end{pmatrix}}$$

$$Q^k = \left(aI + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^k, \text{ } aI \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ commutent,}$$

la formule du binôme est applicable, sels trois termes sont éventuellement non nuls.

$$Q^k = a^k I + k a^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

valable aussi pour $k = 1$.

$$Q^k = \begin{pmatrix} a^k & k a^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \\ 0 & a^k & k a^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$$

2.

$$(a) \quad \begin{array}{l} D^k \text{ a une limite pour } \begin{cases} |a| < 1 \text{ ou } a = 1 \\ |b| < 1 \text{ ou } b = 1 \\ |c| < 1 \text{ ou } c = 1 \end{cases} \\ M^k \text{ a une limite pour } \begin{cases} |a| < 1 \text{ ou } a = 1 \\ |b| < 1 \end{cases} \\ Q^k \text{ a une limite pour } |a| < 1 \end{array}$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^{+\infty} D^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} a^i & 0 & 0 \\ 0 & b^i & 0 \\ 0 & 0 & c^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{+\infty} a^i & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} b^i & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} c^i \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} D^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-c} \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \sum_{i=0}^{+\infty} M^i = I + \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} a^i & 0 & 0 \\ 0 & b^i & i b^{i-1} \\ 0 & 0 & b^i \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{+\infty} a^i & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} b^i & \sum_{i=1}^{+\infty} i b^{i-1} \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} b^i \end{pmatrix}$$

On reconnait la série dérivée de $\frac{1}{1-b}$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} M^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-b} & \frac{1}{(1-b)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} Q^i &= I + \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} a^i & ia^{i-1} & \frac{i(i-1)}{2}a^{i-2} \\ 0 & a^i & ia^{i-1} \\ 0 & 0 & a^i \end{pmatrix} \\ &= I + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{+\infty} a^i & \sum_{i=1}^{+\infty} ia^{i-1} & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2}a^{i-2} \\ 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} a^i & \sum_{i=1}^{+\infty} ia^{i-1} \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} a^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On reconnait en plus ici la moitié de la dérivée seconde de $\frac{1}{1-a}$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} Q^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{1}{(1-a)^2} & \frac{1}{(1-a)^3} \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{(1-a)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-a} \end{pmatrix}$$

3. Le calcul montrera que chaque exponentielle existe.

$$\exp(D) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{D^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{a^i}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^i}{i!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(b) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(c) \end{pmatrix}$$

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^i}{i!} = I + \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{a^i}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^i}{i!} & \frac{b^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \frac{b^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= I + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b^i}{i!} & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(b) & \exp(b) \\ 0 & 0 & \exp(b) \end{pmatrix}$$

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(b) & \exp(b) \\ 0 & 0 & \exp(b) \end{pmatrix}$$

$$\exp(Q) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{Q^i}{i!} = I + Q + \sum_{i=2}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{a^i}{i!} & \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} & \frac{a^{i-2}}{2(i-2)!} \\ 0 & \frac{a^i}{i!} & \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \frac{a^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= I + Q + \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^{i-2}}{2(i-2)!} \\ 0 & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(a) & \exp(a) & \frac{\exp(a)}{2} \\ 0 & \exp(a) & \exp(a) \\ 0 & 0 & \exp(a) \end{pmatrix}$$

$$\exp(Q) = \begin{pmatrix} \exp(a) & \exp(a) & \frac{\exp(a)}{2} \\ 0 & \exp(a) & \exp(a) \\ 0 & 0 & \exp(a) \end{pmatrix}$$

3 Troisième Partie

1.

- (a) N est nilpotente, d'où $N^p = 0$, les valeurs propres de N^p sont nulles, celles de N sont donc aussi nulles. Le spectre ne contient que 0. Comme on travaille sur les complexes, N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}N^2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}N^3P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ et donc } N^3 = 0.$$

Ce qui prouve enfin que N est nilpotente.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A^2)^3 = A^6 = 0. A \text{ est nilpotente,}$$

$$A^3 = 0 = A^4.$$

$$\text{Mais } A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui est non nul... D'où la contradiction.}$$

(b) Avec les notations de la question précédente,

$$P^{-1}(I - N)P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(P^{-1}(I - N)P) = 1 = \det(I - N)$$

$$I - N \text{ est donc inversible. } (I - N)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} N^i = \sum_{i=0}^2 N^i = I + N + N^2$$

$$\boxed{(I - N)^{-1} = I + N + N^2}$$

$$P^{-1}(I - N)P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donne les valeurs propres de}$$

$I - N$: 1 triple.

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre unique de } I - N}$$

Si $I - N$ était diagonalisable, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 serait de dimension 3, c'est à dire $I - N$ serait égal à I . Elle n'est donc pas diagonalisable.

$$(c) \text{ Toujours avec les mêmes notations, } P^{-1}N^2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas nul donc $\alpha\gamma$ n'est pas nul.

$$\text{Soit } X = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$NX = P \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2X = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ forment une base car } \alpha \text{ et } \gamma \text{ ne sont pas}$$

nuls.

Il en est de même de $P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car P est inversible.

Si $A = aI + bN + cN^2$, $AN = aN + bN^2 + cN^3 = NA$.

Réciproquement, dans la base X, NX, N^2X , P la matrice de passage,

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N' = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A'N' = N'A'$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

$b = c = f = 0, a = e = i, d = h$, ce qui donne

$$A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = aI + dN' + gN'^2, \text{ et enfin}$$

$A = aI + dN + gN^2$, ce qui est le résultat demandé.

2.

(a) $(N_1N_2)^3 = N_1N_2N_1N_2N_1N_2 = N_1^3N_2^3 = 0$, N_1N_2 est nilpotente.

$(N_1 + N_2)^5 = N_1^5 + 5N_1^4N_2 + 10N_1^3N_2^2 + 10N_1^2N_2^3 + 5N_1N_2^4 + N_2^5 = 0$
 $N_1 + N_2$ est nilpotente.

(b) $(N_1 + N_2)^3 = N_1^3 + 3N_1^2N_2 + 3N_1N_2^2 + N_2^3 = 3(N_1^2N_2 + N_1N_2^2) = 0$

On a bien : $N_1^2N_2 + N_1N_2^2 = 0$

$(N_1 + N_2)^4 = N_1^4 + 4N_1^3N_2 + 6N_1^2N_2^2 + 4N_1N_2^3 + N_2^4 = 6N_1^2N_2^2 = 0$

On a bien : $N_1^2N_2^2 = 0$

(c) $\exp(N_1 + N_2) = I + (N_1 + N_2) + \frac{(N_1 + N_2)^2}{2}$

$$= I + N_1 + N_2 + \frac{N_1^2 + 2N_1N_2 + N_2^2}{2}$$

$$\exp(N_1)\exp(N_2) = \left(I + N_1 + \frac{N_1^2}{2}\right)\left(I + N_2 + \frac{N_2^2}{2}\right)$$

$$= I + N_1 + \frac{N_1^2}{2} + N_2 + N_1N_2 + \frac{N_1^2N_2}{2} + \frac{N_2^2}{2} + \frac{N_1N_2^2}{2} + \frac{N_1^2N_2^2}{4}$$

$$= I + N_1 + \frac{N_1^2}{2} + N_2 + N_1N_2 + \frac{N_2^2}{2} \text{ en utilisant la question précédente.}$$

Et enfin, $\exp(N_1 + N_2) = \exp(N_1)\exp(N_2)$

(d) $\exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2}$

$\exp(N)$ est donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha\gamma}{2} \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien inversible.

On peut penser que comme $\exp(N)$ commute avec N , son inverse commute aussi avec N , c'est d'ailleurs facile à montrer. On cherche donc $(\exp(N))^{-1}$ sous la forme $aI + bN + cN^2$

$$\left(I + N + \frac{N^2}{2}\right)(aI + bN + cN^2) = I$$

$$(a-1)I + (a+b)N + \left(\frac{a}{2} + b + c\right)N^2 = 0$$

Ces trois matrices forment une famille libre : $\begin{cases} a-1=0 \\ a+b=0 \\ \frac{a}{2} + b + c = 0 \end{cases}$

Et enfin : $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \boxed{(\exp(N))^{-1} = I - N + \frac{N^2}{2}}$

On remarque aussi que c'est $\exp(-N) \dots$

3.

(a) On calcule facilement $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0}$

(b) $\sum_{i=0}^{+\infty} N^i = I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est aussi l'inverse de $I - N$

(c) $\boxed{\exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

$$\boxed{\exp(-N) = I - N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

4 Quatrième Partie

1.

(a) Toute bonne calculatrice fournit :

$$\boxed{-3, \text{ valeur propre simple, } 3, \text{ valeur propre double}}$$

- (b) R est diagonalisable car $\mathcal{E}_3$ est de dimension 2.

On écrit une base de chaque sous-espace propre :

$$\mathcal{E}_{-3} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{E}_3 : \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\exp(D)$ existe donc $\exp(R)$ existe aussi,

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(3) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(3) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-3) \end{pmatrix}$$

$$\text{On prend } P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, R = PDP^{-1},$$

et donc $\exp(R) = P \exp(D) P^{-1}$

$$\exp(R) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5e^3 + e^{-3} & -e^3 + e^{-3} & 2e^3 - 2e^{-3} \\ -e^3 + e^{-3} & 5e^3 + e^{-3} & 2e^3 - 2e^{-3} \\ 2e^3 - 2e^{-3} & 2e^3 - 2e^{-3} & 2e^3 + 4e^{-3} \end{pmatrix}$$

2.

- (a) 1 est valeur propre simple, -1 est valeur propre double

- (b) M n'est pas diagonalisable car $\mathcal{E}_{-1}$ n'est pas de dimension 2.

On écrit une base de chaque sous-espace propre :

$$\mathcal{E}_1 : U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathcal{E}_{-1} : V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (c) On résout $(M + I)W = V$, on trouve $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (+\lambda V)$

$$\text{Pour avoir } M = PTP^{-1}, \text{ on prend } P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\exp(T)$ existe d'après la partie **II**, donc $\exp(M)$ existe aussi.

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\exp(M) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e - e^{-1} & 3e - 5e^{-1} & e^{-1} \\ e + e^{-1} & e + 5e^{-1} & -e^{-1} \\ 2e - 2e^{-1} & 2e - 2e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix}$$