

## Corrigé de la deuxième épreuve de mathématique

Mines -MP- 2023

daouia\_abdelkader@hotmail.fr

### Introduction :

Dans ce sujet , on démontre que la fonction  $f$  définie ci-dessous est la seule qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $f$  est  $\ln$ -convexe sur  $I = ]-1, +\infty[$  ( $\ln(f)$  est convexe).
2.  $f$  vérifie la relation (1) :

$$(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \quad \forall x \in I$$

3.  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

On peut trouver un sujet qui traite une problématique analogue , c'est le sujet math 1 Mines -PC 2003 qui traite le théorème de Bohr-Mollerup , à savoir :

$\Gamma$  définie par : ( $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ ) est la seule fonction  $f$  qui vérifie :

1.  $f$  est  $\ln$ -convexe sur  $]0, +\infty[$  ( $\ln(f)$  est convexe).
2.  $f$  vérifie la relation :

$$f(x+1) = xf(x) \quad x \in ]0, +\infty[$$

3.  $f(1) = 1$ .

.  
.  
.

Dans tout le sujet , on note :

$$I = ]-1, +\infty[ \quad , \quad \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad , \quad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dt$$

## 1 Calcul de $\sigma(1)$

1  $\triangleright$   $\sigma$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 (Règle de d'Alembert), la convergence est normale sur  $[-1, 1]$  :

$$\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad x \in [-1, 1]$$

$\sigma$  est donc continue sur  $[-1, 1]$ .

2  $\triangleright$  Une double intégration par parties donne :

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{(2\alpha\pi + \beta)(-1)^n - \beta}{n^2} \implies \left[ \beta = -1 \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \right]$$

Soit  $t \in ]0, \pi]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \quad (e^{it} \neq 1) \\ &= e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \left( \frac{-2i \sin(\frac{nt}{2})}{-2i \sin(\frac{t}{2})} \right) = \frac{\cos(\frac{(n+1)t}{2}) \sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})} \left( \sin(\frac{(2n+1)t}{2}) - \sin(\frac{t}{2}) \right) \end{aligned}$$

En remarquant :

$$2 \cos(b) \sin(a) = \sin(b+a) - \sin(b-a)$$

On peut raisonner autrement :

$$2 \sin(\frac{t}{2}) \left( \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sin(\frac{(2k+1)t}{2}) - \sin(\frac{(2k-1)t}{2}) \right)$$

C'est une somme télescopique :

$$2 \sin(\frac{t}{2}) \left( \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = \sin(\frac{(2n+1)t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})$$

Et on retrouve le résultat.

3 ▷ C'est le lemme de Riemann-Lebesgue.

Soit  $x > 0$ , on effectue une intégration par parties :

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = \left[ -\frac{\varphi(t) \cos(xt)}{x} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\varphi'(t) \cos(xt)}{x} dt$$

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \left| \frac{\varphi(\pi) \cos(x\pi)}{x} \right| + \left| \frac{\varphi(0)}{x} \right| + \int_0^\pi \left| \frac{\varphi'(t) \cos(xt)}{x} \right| dt \leq \frac{1}{x} (|\varphi(\pi)| + |\varphi(0)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt)$$

On fait tendre  $x$  vers  $+\infty$  et on trouve le résultat.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour  $\left[ \beta = -1, \alpha = \frac{1}{2\pi} \right]$  :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \left( \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(kt) dt \right) = \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \left( \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\ &= \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \left( \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\frac{(2n+1)t}{2}) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) dt \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \varphi(t) = \frac{\alpha t^2 + \beta t}{2 \sin(\frac{t}{2})} \quad t \in ]0, \pi].$$

$\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \pi]$  :

$$(a) \quad \varphi'(t) = \frac{(2\alpha t + \beta) \sin(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}(\alpha t^2 + \beta t) \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} = \frac{(2\alpha t + \beta) \frac{t}{2} - \frac{1}{2}(\alpha t^2 + \beta t)(1 - \frac{t^2}{8}) + o(t^2)}{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}$$

(b)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \alpha \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \beta$$

$$(c) \quad -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) dt = -\frac{1}{2} \left[ \alpha \frac{t^3}{3} + \beta \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6}$$

$\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \pi]$ ,  $\varphi, \varphi'$  admettent une limite en 0, d'après le théorème de prolongement, elle admet un prolongement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ . En utilisant ce qui précède :

$$\sigma(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

## 2 Équivalents

4 ▷ La fonction  $t \mapsto (\sin(t))^x$  est continue, positive sur  $]0, \pi]$  :

$$(\sin(t))^x \sim_0 t^x = \frac{1}{t^{-x}}$$

En utilisant les intégrales de Riemann, la fonction est intégrable (ou l'intégrale converge puisque elle est positive) si et seulement si  $-x < 1$ , donc pour  $x \in I = ]-1, +\infty[$ .

$$f(x+2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x+1} \sin(t) dt$$

On effectue une intégration par parties :

$$f(x+2) = \left[ -(\sin(t))^{x+1} \cos(t) \right]_0^\pi + (x+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x \cos^2(t) dt = (x+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x (1 - \sin^2(t)) dt$$

On trouve donc :

$$f(x+2) = (x+1)f(x) - (x+1)f(x+2) \implies (x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$$

5 ▷ On écrit :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x, t) dt$$

$g$  définie sur  $] -1, +\infty[ \times ]0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(x, t) = \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x$$

(a)  $g$  est de classe  $\mathbb{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty[ \times ]0, \frac{\pi}{2}]$ .

(b) Soit  $[a, b] \subset ] -1, +\infty[$ , soit  $c \in ] -1, a]$  :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq -\ln(\sin(t)) (\sin(t))^a \sim_0 -\ln(\sin(t)) t^a,$$

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(x, t) \right| \leq \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a \sim_0 \ln^2(\sin(t)) t^a \in [a, b] \times ]0, \frac{\pi}{2}]$$

(c)  $0 \leq -\ln(\sin(t)) t^a =_0 o\left(\frac{1}{t^c}\right)$ ,  $0 \leq \ln^2(\sin(t)) t^a =_0 o\left(\frac{1}{t^c}\right)$

Les fonctions dominatrices sont intégrables sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ .

$f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  :

$$f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \leq 0$$

$$f''(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(x, t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \geq 0$$

$f$  est décroissante convexe.

$$6 \triangleright f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) \quad , \quad x \in ]-1, +\infty[$$

$$f(x) \sim_{-1} \frac{f(1)}{(x-1)} = \frac{1}{(x-1)}$$

7  $\triangleright (n+1)f(n) = (n+2)f(n+2)$  . On multiplie par  $f(n+1)$  :

$$(n+1)f(n+1)f(n) = (n+2)f(n+2)f(n+1)$$

La suite  $((n+1)f(n+1)f(n))_n$  est constante :

$$(n+1)f(n+1)f(n) = f(1)f(0) = \frac{\pi}{2} \implies f(n+1)f(n) = \frac{\pi}{2(n+1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

$f$  est décroissante , strictement positive , soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(n+1) \leq f(n) \leq f(n-1) \implies f(n+1)f(n) \leq f^2(n) \leq f(n)f(n-1) \implies \frac{\pi}{2(n+1)} \leq f^2(n) \leq \frac{\pi}{2n}$$

On en déduit facilement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}} f(n) = 1 \implies f(n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Soit  $x$  , on note  $n = [x]$  la partie entière de  $x$  :

$$x-1 < n \leq x \implies 1 - \frac{1}{x} < \frac{n}{x} \leq \frac{n}{x} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = 1$$

Comme  $f$  est décroissante :

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

En utilisant l'équivalence pour les entiers , on peut généraliser pour les réels.

8  $\triangleright$  C'est une fonction décroissante , convexe , positive ,  $D_{x=-1}$  est une asymptote verticale ,  $D_{y=0}$  est une asymptote horizontale .

Il faut tenir compte de :

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad f(1) = 1$$

### 3 Développement en série entière

Si  $n \in \mathbb{N}$  , on note  $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)))^n dt$ .

9 ▷ La fonction  $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$(\ln(\sin(t)))^n \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Elle est donc intégrable sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ .

Si on prend le changement de variable  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , on trouve :

$$D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$$

10 ▷ On rappelle :  $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt$

$$(a) f'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$$

$$\begin{aligned} \implies 2f'(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt \\ &= -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt \end{aligned}$$

Moyennant le changement de variable :  $x = \pi - t$ , on trouve :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt$$

On trouve finalement :

$$2f'(0) = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + f'(0) \implies f'(0) = -\frac{\pi \ln(2)}{2}$$

$$(b) f'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin(t) dt$$

On effectue une intégration par parties :

$$u'(t) = \sin(t) \quad , \quad u(t) = 1 - \cos(t) \quad , \quad v(t) = \ln(\sin(t)) \quad , \quad v'(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

On trouve, en tenant compte des limites en 0 :

$$f'(1) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} (1 - \cos(t)) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right) \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

Finalement :

$$f'(1) = 2 \left[ \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \left[ \ln\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \ln(2)$$

11 ▷ Si on pose le changement de variable :  $u = -\ln(\sin(t))$ , on trouve :

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du$$

On sait que  $n! = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$ .

$$\begin{aligned}
(-1)^n D_n &= (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du + (-1)^n \int_0^{+\infty} \left( \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} - u^n e^{-u} \right) du \\
&= (-1)^n n! + (-1)^n \int_0^{+\infty} \left( \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}} - u^n e^{-u} \right) du \\
&= (-1)^n n! + (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-3u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}(1+\sqrt{1-e^{-2u}})} du \\
0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-3u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}(1+\sqrt{1-e^{-2u}})} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-3u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}} = \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-2u}}{\sqrt{e^{2u}-1}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{e^{2u}-1}} u^{n-1} e^{-2u} du
\end{aligned}$$

La fonction  $u \mapsto \frac{u}{\sqrt{e^{2u}-1}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , prolongeable par continuité en 0, et de limite nulle en  $+\infty$ , elle est donc bornée sur  $]0, +\infty[$  :

$$\exists M > 0 \quad : \quad 0 \leq \frac{u}{\sqrt{e^{2u}-1}} \leq M \quad u \in ]0, +\infty[$$

On peut donc donner la majoration :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-3u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}(1+\sqrt{1-e^{-2u}})} \leq M \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-2u} du = \frac{M}{2^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = \frac{M}{2^n n} n! = o(n!)$$

Finalement :

$$(-1)^n D_n = n! + o(n!)$$

$$12 \triangleright f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(x \ln(\sin(t))) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln(\sin(t)))^n x^n}{n!} \right) dt$$

Il suffit juste de justifier l'interversion somme intégrale :

On pose  $h_n(t) = \frac{x^n}{n!} (\ln(\sin(t)))^n$ ,  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |h_n(t)| dt = \frac{(-1)^n |x|^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D_n \sim_n |x|^n$$

Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |h_n(t)| dt$  converge, on peut donc intervertir :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(\sin(t)))^n}{n!} dt \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n x^n}{n!} \quad x \in ]-1, 1[$$

## 4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer  $f''(0)$ ,  $\rho = \frac{b-a}{b+a}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $|\rho| < 1$

13 ▷  $\Psi$  est la composée de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et  $x \mapsto a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)$  est strictement positive.

$$\Psi'(x) = \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) &= 4 \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx} \right) = 4 \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho e^{2ix})^k \right) \quad |\rho e^{2ix}| < 1 \\ &= 4 \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - \rho e^{2ix}} \right) = 4 \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - \rho \cos(2x) - i\rho \sin(2x)} \right) \\ &= 4 \frac{\rho \sin(2x)}{(1 - \rho \cos(2x))^2 + \rho^2 \sin^2(2x)} = 4 \frac{\rho \sin(2x)}{1 - 2\rho \cos(2x) + \rho^2} \end{aligned}$$

On rappelle juste :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Et on trouve l'égalité .

14 ▷ On pose  $G(x) = 2 \ln \left( \frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$ ,  $g_k(x) = \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_k$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(b)  $\|g_k\|_\infty = \frac{1}{k} |\rho|^k$ , la convergence est donc normale.

(c)  $\|g'_k\|_\infty = 2|\rho|^k$ , la série  $\sum_{k \geq 1} g'_k$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$

$G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \Psi'(x) \quad x \in \mathbb{R} \\ \Psi(0) &= 2 \ln(a) \end{aligned}$$

$$G(0) = 2 \ln \left( \frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \rho^k = 2 \ln \left( \frac{a+b}{2} \right) + 2 \ln(1 - \rho) = 2 \ln \left( \frac{a+b}{2} \right) + 2 \ln \left( \frac{2a}{b+a} \right) = \Psi(0)$$

On a donc l'égalité partout :

$$G(x) = \Psi(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

15 ▷ En utilisant les notations de la question précédente, on peut écrire :

$$\Psi^2(x) = 2 \ln \left( \frac{a+b}{2} \right) \Psi(x) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x) \Psi(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

On peut établir facilement la convergence normale sur  $[0, \pi]$ , on peut donc intervertir :

$$\int_0^\pi \Psi^2(x) dx = 2 \ln \left( \frac{a+b}{2} \right) \int_0^\pi \Psi(x) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi g_k(x) \Psi(x) dx$$

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \int_0^\pi \Psi(x) dx &= 2\pi \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi g_k(x) dx \\
&= 2\pi \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \underbrace{\int_0^\pi \cos(2kx) dx}_{=0} \\
&= 2\pi \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

(b) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi g_k(x) \Psi(x) dx &= 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) dx}_{=0} - 2 \sum_{h=1}^{+\infty} \int_0^\pi g_k(x) g_h(x) dx \\
&= -2 \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{\rho^{k+h}}{hk} \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2hx) dx \\
&= - \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{\rho^{k+h}}{hk} \int_0^\pi (\cos(2(k+h)x) + \cos(2(k-h)x)) dx \\
&= -\pi \frac{\rho^{2k}}{k^2}
\end{aligned}$$

Finalement , on trouve le résultat :

$$\int_0^\pi \Psi^2(x) dx = 4\pi \ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2\pi\sigma(\rho^2)$$

16 ▷ Pour  $t \in ]0, \pi[$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_n(t) = 2 \ln(\sin(t))$$

On remarque que pour  $t \in ]0, \pi[$  :

$$\frac{\sin^2(t)}{4} \leq b_n^2 \sin^2(t) \leq a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \leq a_n^2 + b_n^2 \leq a_n + b_n = 1$$

On a donc la majoration :

$$0 \leq \Psi_n^2(t) \leq (\ln(4) + \ln(\sin(t)))^2 \quad t \in ]0, \pi[$$

La fonction dominatrice est intégrable , en utilisant le théorème de la convergence dominée :

$$4 \int_0^\pi \ln^2(\sin(t)) dt = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_n^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \Psi_n^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4\pi \ln^2\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) + 2\pi\sigma(\rho_n^2)\right)$$

Le changement de variable  $x = \pi - t$  , nous permet d'écrire :

$$\int_0^\pi \ln^2(\sin(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(t)) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln^2(\sin(t)) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(t)) dt$$

On a donc :

$$8f''(0) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(t)) dt = 4 \int_0^\pi \ln^2(\sin(t)) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4\pi \ln^2\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) + 2\pi\sigma(\rho_n^2)\right)$$

$$\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}, \quad \rho_n = \frac{n-1}{n+1} \rightarrow 1$$

Comme  $\sigma$  est continue en 1, on peut écrire :

$$8f''(0) = 4\pi \ln^2(2) + 2\pi\sigma(1) \quad \implies \quad f''(0) = \frac{\pi \ln^2(2)}{2} + \frac{\pi^3}{24}$$

17 ▷ Soient  $(x, y) \in ]-1, +\infty[^2$ ,  $\lambda \in ]0, 1[$  :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{\lambda x} (\sin(t))^{(1-\lambda)y} dt$$

En remarquant que :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda} = 1$$

On peut utiliser l'inégalité de Hölder :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dt \right)^\lambda \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^y dt \right)^{1-\lambda}$$

On introduit le  $\ln$ , et on trouve le résultat.

(C'est facile de remarquer que  $f(x) > 0$ ,  $x \in I$ ).

18 ▷  $f$  vérifie la propriété (1) définie dans la question 4, on peut écrire :

$$f(2(x+p)) = \frac{2x+2p-1}{2x+2p} f(2(x+p-1)) = f(2x) \prod_{k=0}^{p-1} \left( \frac{2x+2k+1}{2x+2k+2} \right)$$

Puis, on introduit le  $\ln$ .

19 ▷  $\tilde{f}$  est convexe, pour  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $x \leq p$  :

$$n-1 \leq n \leq n+x \leq n+p$$

Et on utilise la croissance des taux d'accroissements pour les fonctions convexes.

$$(a) \quad \tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) = \ln \left( \frac{2n-1}{2n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) = 0$$

$$(b) \quad \tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left( \frac{2n+2k+1}{2n+2k+2} \right)$$

C'est une somme finie de suites qui ont 0 pour limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n) = 0$$

La règle des gendarmes permet de conclure.

20 ▷ Soit  $x \in I$  ,  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\tilde{f}(n+x) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( \frac{2x+2k+1}{2x+2k+2} \right) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{1}{2x+2k+2} \right)$$

$$\tilde{f}(n) = \tilde{f}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( \frac{2k+1}{2k+2} \right) = \tilde{f}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{1}{2k+2} \right)$$

On peut en déduire :

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{2k+2} \right) - \ln \left( 1 - \frac{1}{2x+2k+2} \right) \right] + \tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)$$

La série  $\sum_{k \geq 0} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{2k+2} \right) - \ln \left( 1 - \frac{1}{2x+2k+2} \right) \right]$  est convergente (le terme général est un  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  , on passe à la limite :

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{2k+2} \right) - \ln \left( 1 - \frac{1}{2x+2k+2} \right) \right]$$

$\tilde{f}$  est entièrement déterminée par la valeur en 0 et l'expression qu'on vient d'établir , d'où l'unicité de  $\tilde{f}$  et celle de  $f$ .

21 ▷ On introduit la fonction  $h$  définie sur  $] -1, +\infty[$  , par :

$$h(t) = \frac{\pi}{2g(0)} g(tT)$$

$h$  est  $\ln$ -convexe et vérifie :

$$h(0) = \frac{\pi}{2}$$

D'après l'unicité :

$$h(x) = f(x) \implies g(x) = \frac{2g(0)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{\frac{x}{T}} dt \quad x \in ] -T, +\infty[$$

22 ▷ Une telle fonction n'existe pas .

Elle doit être à valeurs dans  $\mathbb{R}^{*+}$  , et pour  $t = -T$  , on trouve :

$$h(-T) = 0$$

Ce qui est impossible.