

Exercice 1

1. a) La limite de f en $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré, c'est-à-dire $+\infty$.
 b) f est un polynôme, donc dérivable sur tout intervalle, en particulier $[0, +\infty[$. Sa dérivée est $f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1$, négative sur $[0, 2]$, positive sur $[2, +\infty[$.

On en déduit facilement :

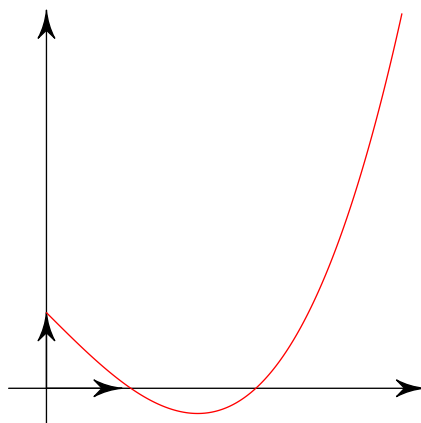
x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$

2. a) f est continue, strictement monotone sur $[0, 2]$ et change strictement de signe, elle s'annule donc exactement une fois sur $]0, 2[$.
 f est continue, strictement monotone sur $[2, +\infty[$ et change strictement de signe, elle s'annule donc exactement une fois sur $]2, +\infty[$.
 b) On a $f(\beta) = 0$, donc $1 + \frac{\beta^3}{12} = \beta$.
 c) On a $f(1) > 0$ et $f(2) < 0$, donc, $\beta \in]1, 2[$.
 On a aussi $f(2,7) < 0$ et $f(2,8) > 0$, donc, $\gamma \in]2,7; 2,8[$.

d) On en déduit facilement :

x	0	β	γ	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

3.



4. a) On pose $g(x) = 1 + \frac{x^3}{3}$, remarquons que $g(\beta) = \beta$ car $f(\beta) = 0$.
 g est continue croissante sur $[0, \beta]$, donc l'image de cet intervalle est $[g(0), g(\beta)] = [0, \beta]$.
 On a donc $u_n \in [0, \beta] \Rightarrow u_{n+1} \in [0, \beta]$.
 Comme $u_0 = 1 \in [0, \beta]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \beta]$.
 b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
 c) Enfin, la suite (u_n) est croissante majorée, donc convergente.
 Donc on a, quand $n \rightarrow +\infty$, $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$, or, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = f(u_n) \rightarrow 0$.
 Comme $u_n \in [0, \beta]$, on obtient $u_n \rightarrow \beta$.
 d) On écrit la procédure en Maple, la valeur initiale de u est u_0 .
 On calcule ensuite $u_1, u_2, \dots, u_N$ au moyen d'une boucle for.

```

suite:=proc(N)
  local u,i;
  u:=1;
  for i from 1 to N do
    u:=u^3/12+1
  end do;
  u
end proc;
```

Exercice 2

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

Ce qui donne : $x^2 f''(x) - x(2x^2 - 1)f'(x) - (2x^2 + 1)f(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x^2 - 1}{x} - \frac{2x^2 + 1}{x} = 0$

f est bien solution de (E) sur chaque intervalle où elle est de classe $\mathcal{C}^2$, c'est à dire $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2. a) Sur l'ouvert de convergence, la somme d'une série entière est dérivable terme à terme, et la série dérivée a le même rayon de convergence.

On a donc, pour $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, et, $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

- b) On écrit que f ainsi défini est solution de (E) sur $] -R, R[$.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - (2x^2 - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (2x^2 + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - (2x^2 - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - (2x^2 + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)(n+1) a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^{n+2} \end{aligned}$$

On réindexe le dernier terme en posant $n' = n + 2$, puis en supprimant le *prime*, on obtient :

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)(n+1) a_n x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-2} x^n$$

On sépare les deux premiers termes de la première série, le second est d'ailleurs déjà nul :

$$-a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)((n+1) a_n - 2 a_{n-2}) x^n = 0$$

Le développement en série entière de la fonction nulle est unique,

ce qui donne : $a_0 = 0$ et, $\forall n \geq 2$, $a_n = \frac{2}{n+1} a_{n-2}$.

- c) La dernière relation appliquée avec $n = 2$ en utilisant $a_0 = 0$ donne $a_2 = 0$, de la même façon, avec $n = 4$, on obtient $a_4 = 0$.

Par une récurrence très élémentaire, $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

- d) Si on pose $n = 2p + 1$, la relation de récurrence devient : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p+1} = \frac{2}{2p+2} a_{2p-1} = \frac{1}{p+1} a_{2p-1}$.

Notons d'abord que la formule donnée est valable pour $p = 0$!

Ensuite il suffit de montrer qu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$a_{2p-1} - \frac{1}{p+1} a_{2p-1} = \frac{a_1}{(p+1)!} - \frac{1}{p+1} \cdot \frac{a_1}{(p)!} = 0$$

3. On applique le théorème de d'Alembert avec $x_0 > 0$ pour avoir une série à termes strictement positifs :

$$u_p = \frac{x_0^{2p+1}}{(p+1)!}.$$

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{\frac{x_0^{2p+3}}{(p+2)!}}{\frac{x_0^{2p+1}}{(p+1)!}} = \frac{x_0^2}{p+2} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \text{ On a donc } R = +\infty.$$

4. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ avec $R = +\infty$.

$$\exp(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \text{ avec bien sûr encore } R = +\infty.$$

5. $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$, avec $g(0) = 0$ puisqu'il n'y a pas de terme constant.

$$xg(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+2}}{(p+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \text{ en ré-indexant avec } n = p + 1.$$

Donc : $xg(x) = \exp(x^2) - 1$, ce qui donne : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{\exp(x^2) - 1}{x}$

6. L'intervalle $]0, +\infty[$ est tel que les coefficients de l'équation différentielle linéaire du second ordre sont définis et continus, celui de y'' ne s'annulant pas. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle sans second membre y est donc un espace vectoriel de dimension 2.

On a deux solutions clairement non proportionnelles (voir la limite en 0) qui sont les restrictions de f et de g sur cet intervalle, notées encore f et g .

Ainsi, sur $]0, +\infty[: \mathcal{S} = \text{Vect}(f, g)$.

7. Le procédé est le même sur $] -\infty, 0[$, avec le même résultat.

Sur $] -\infty, 0[$, $h(x) = \lambda_- f(x) + \mu_- g(x)$, et sur $]0, -\infty[$, $h(x) = \lambda_+ f(x) + \mu_+ g(x)$

Les limites à gauche et à droite en 0 doivent exister et être égales, donc $\lambda_- = \lambda_+ = 0$.

Les limites à gauche et à droite en 0 des dérivées doivent exister et être égales, donc, compte tenu des λ nuls,

$$\frac{\mu_-}{2} = \frac{\mu_+}{2}.$$

Nécessairement : $h(x) = \mu g(x)$ qui est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{S} = \text{Vect}(g)$.

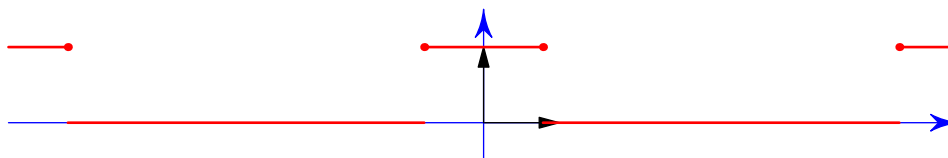
Problème

Partie A

- Ce sont trois séries de Riemann, on sait que $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.
Donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge car $a = 1$; $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge car $a = \frac{3}{2}$; et enfin $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $a = 2$.
- On a : $0 \leq \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, donc, par comparaison de séries positives, $\sum \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ converge.

Partie B

-



- f est paire, donc les coefficients de Fourier impairs, les « $b_n(f)$ » sont nuls pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 $a_0(f)$ est la valeur moyenne de f , ici mesurée sur $[0, \pi]$ par parité, clairement : $a_0(f) = \frac{\alpha}{\pi}$.
Les autres coefficients pairs, les « $a_n(f)$ » pour $n \in \mathbb{N}^*$, se calculent aussi sur $[0, \pi]$ par parité.
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\alpha)}{n}.$$
- f est T -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc : $a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f^2(t) dt$
Ce qui donne ici : $\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha dt = \frac{\alpha}{\pi}$
Ou encore : $\alpha^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \alpha\pi$; et enfin : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$
- On choisit $\alpha = 1 \in]0, \pi[$, et on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}$

Partie C

- h est continue, donc localement intégrable sur $]0, 1]$, on a donc une singularité en 0^+ .
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$, on a donc une limite finie en un point fini, l'intégrale converge en 0 et enfin, converge.
- $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$, on a donc une singularité en $+\infty$.
Cette application est une fonction de Riemann : $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$, avec $n = 2 > 1$, son intégrale converge donc en $+\infty$.

3. Pour dériver h , on la considère comme un produit, donc, pour $x \in]0, +\infty[$, on a : $h'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{x^2} - \frac{2 \sin^2 x}{x^3}$.

4. $x\sqrt{x}h'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{x}} - \frac{2 \sin^2 x}{x\sqrt{x}}$.

On majore en valeur absolue en majorant, toujours en valeur absolue les « sinus » et « cosinus » par 1,

on obtient : $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$.

Maintenant, on majore en valeur absolue en majorant, toujours en valeur absolue le « cosinus » par 1 et le « sinus » par son arc, on obtient : $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$.

5. Pour $x \geq 1$, on utilise la première majoration : $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}} \leq 2 + 2 = 4$.

Pour $x \in]0, 1[$, on utilise la seconde majoration : $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \leq 2 + 2 = 4$.

Finalement, pour $x \in]0, +\infty[$, on a bien : $|h'(x)| \leq \frac{4}{x\sqrt{x}}$, ce qui est le résultat demandé.

6. On applique $N - 1$ fois la relation de Chasles, $\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} h(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} h(x) dx$.

On fait maintenant N changements de variables, $x = n\alpha + t$,

on obtient : $\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} h(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} h(n\alpha + t) dt$, ce qui est la formule demandée.

On remarque maintenant que $\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha^2} dt = \int_0^{\alpha} h(n\alpha) dt$,

ce qui donne : $\sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} h(n\alpha + t) dt - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} h(n\alpha + t) dt - \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} h(n\alpha) dt = \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} h(n\alpha + t) - h(n\alpha) dt$

7. h étant de classe $\mathcal{C}^1$, pour $b \geq a > 0$, $|h(b) - h(a)| \leq \sup_{u \in [a, b]} |h'(u)| (b - a) \leq \frac{4}{a\sqrt{a}} (b - a) = \frac{4}{a^{3/2}} (b - a)$.

On applique ceci avec $t \geq 0$, $a = n\alpha$ et $b = n\alpha + t$, on obtient : $|h(n\alpha + t) - h(n\alpha)| \leq \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}$

8. On obtient facilement, en utilisant la majoration précédente :

$$\sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} |h(n\alpha + t) - h(n\alpha)| dt \leq \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{2\alpha^2}{(n\alpha)^{3/2}} = 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}}$$

9. On repart du résultat de la question 6,

$$\left| \int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} h(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \right| = \left| \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} h(n\alpha + t) dt - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \right| = \left| \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} h(n\alpha + t) - h(n\alpha) dt \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} |h(n\alpha + t) - h(n\alpha)| dt \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}}.$$

On a donc montré que : $\left| \int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} h(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \right| \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}}$.

Quand $N \rightarrow +\infty$, on a : $\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} h(x) dx \rightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} h(x) dx$, dont on a vu qu'elle existait bien.

Par ailleurs, on a montré dans la partie précédente, à la question 3, en divisant par α :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Enfin, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, puisque la série converge !

On fait donc tendre N vers $+\infty$, on a ainsi : $\left| \int_{\alpha}^{+\infty} h(x) dx - \frac{\pi - \alpha}{2} \right| \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

On fait tendre enfin α vers 0^+ , ce qui donne $\int_0^{+\infty} h(x) dx = \frac{\pi}{2}$,

car l'intégrale converge en 0 et le majorant a une limite nulle !