## Problème 1

Le but de ce problème est l'étude de quelques spécificités des fonctions numériques $c$ et $s$ de la variable réelle $x$ définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

## Partie I

## Majorations, minorations, encadrements

1. Calculer $c(0)$ et $s(0)$ ; donner une valeur approchée de $c(1)$ et de $s(1)$ à $10^{-2}$ près.

2. Démontrer que la fonction $c$ est paire et que la fonction $s$ est impaire.

3.

   3.1. Justifier que, pour tout réel $x$, on a :

   - $[c(x)]^2 - [s(x)]^2 = 1$ ;
   - $c(x) \geq 1$.

   3.2. Vérifier que, pour tout réel $x$ positif, on a :

$$0 \leq s(x) < c(x).$$

4.

   4.1. Justifier que les fonctions $c$ et $s$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ ; déterminer les fonctions dérivées correspondantes.

   4.2. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions $c$ et $s$.

   4.3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $c$ et $s$ dans un même repère orthonormal du plan d'unité graphique 1cm.

5.

   5.1. Démontrer que, pour tout réel $x$ positif, on a :

$$x \leq s(x).$$

   5.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel $x$ positif :

   - $1 + \frac{x^2}{2} \leq c(x)$ ;
   - $x + \frac{x^3}{6} \leq s(x)$.

6.

6.1. Démontrer que, pour tout réel $x$ compris entre 0 et 1, on a :

- $s(x) \leq 2x$ ;
- $c(x) \leq 1 + x^2$.

6.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel $x$ compris entre 0 et 1 :

- $s(x) \leq x + \dfrac{x^3}{3}$ ;
- $c(x) \leq 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12}$.

6.3. Justifier que, pour tout réel $x$ compris entre 0 et 1, on a :

$$0 \leq c(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{1}{12}.$$

Qu'en est-il pour $s(x)$ ?

## Partie II

## Vers une approximation de la fonction *c* par des fonctions polynômes

1. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel $x$, on a :

$$c(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\, c(t)dt\,.$$

En déduire que, pour tout réel $x$, on a :

$$c(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} c(t)dt\,.$$

2. Démontrer que, pour tout réel $x$, la relation suivante est satisfaite pour tout entier $n$ strictement positif :

$$c(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)dt\,.$$

*Un nombre réel strictement positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que* $c(a) = 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^{2k}}{(2k)!}$.

3. Démontrer que pour tout entier $n$ strictement positif, on a :

$$\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)dt \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}\, c(a).$$

4. On note $v_n = \dfrac{a^{2n}}{(2n)!}$ où $n$ est un entier strictement positif.

4.1. Prouver qu'il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $N$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}.$$

4.2. Démontrer que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $N$, on a :

$$v_n \leq \frac{1}{2^{n-N}} v_N.$$

4.3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

5. On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

- $u_0 = 1$ ;
- pour tout entier $n$ strictement positif, $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2k}}{(2k)!}$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $c\,(a)$.

## Partie III

## Les fonctions *c* et *s* et l'hyperbole

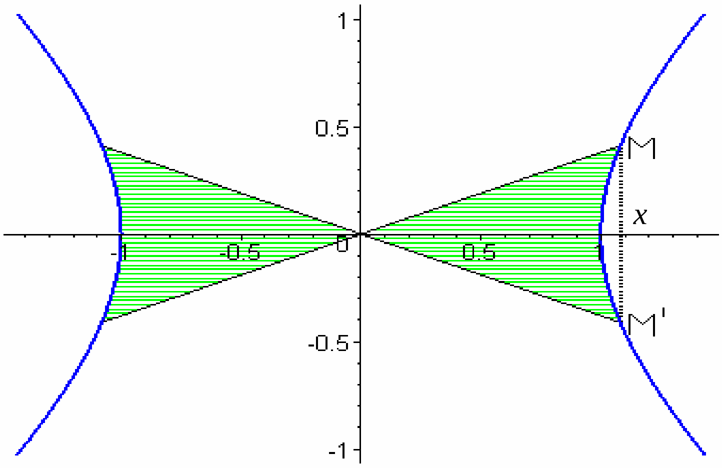
*On admettra que si une fonction continue sur l'intervalle* $[1\,;\,+\infty[$ *est monotone ou strictement monotone sur l'intervalle* $]1\,;\,+\infty[$, *il en est de même sur l'intervalle* $[1\,;\,+\infty[$.

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ admettant des coordonnées $x$ et $y$ positives.

1. Justifier que la courbe $\mathcal{H}^+$ est la courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ de la fonction $f$ qui à tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ associe $\sqrt{x^2-1}$.
2. Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{H}^+$.
3. Démontrer que la courbe $\mathcal{H}$ peut être obtenue à partir de la courbe $\mathcal{H}^+$ par des symétries que l'on précisera.
4. Tracer la courbe $\mathcal{H}$ dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

*Un nombre réel positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que les coordonnées du point* M *de* $\mathcal{H}^+$ *tel que l'aire hachurée représentée ci-dessous soit égale à 2a sont (c(a), s(a)).*




5. On note :

- ♦ $F$ la primitive de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ définie sur l'intervalle [1 ; +∞[ et nulle en 1 ;
- ♦ $\mathcal{A}$ la fonction qui à tout réel $x$ supérieur ou égal à 1 associe l'aire de la partie hachurée représentée ci-dessus et correspondant au point M d'abscisse $x$ de la courbe $\mathcal{H}^+$ ;
- ♦ $g$ la fonction numérique de variable réelle $x$ définie sur l'intervalle [1 ; +∞[ par :

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - F(x).$$

5.1. Justifier la relation suivante, pour tout réel $x$ supérieur ou égal à 1 :

$$\mathcal{A}(x) = 4\, g(x).$$

5.2. Démontrer que la fonction $\mathcal{A}$ est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; +∞[.

5.3. Justifier l'inégalité suivante, pour tout réel $x$ strictement supérieur à 1 :

$$g'(x) \geq \frac{1}{2x}.$$

5.4. Déduire de ce qui précède :

- ♦ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ;
- ♦ Quel que soit le réel $a$ positif, il existe un unique réel $x_a$ supérieur ou égal à 1 tel que :

$$\mathcal{A}(x_a) = 2a.$$

6. Soient $\vec{I} = \dfrac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{J} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$.

Pour tout point M du plan de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on note $(X, Y)$ ses coordonnées dans le repère $(O\,;\vec{I}, \vec{J})$.

6.1. Prouver que $(O\,;\vec{I}, \vec{J})$ est un repère orthonormal du plan.

6.2. Exprimer $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.

6.3. En déduire que, dans le repère $(O\,;\vec{I}, \vec{J})$, $\mathscr{H}$ est la courbe représentative de la fonction $h : X \mapsto \dfrac{1}{2X}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

7. On note A le point de coordonnées (1, 0) dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

7.1. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $(O\,;\vec{I}, \vec{J})$ ?

7.2. Tracer la courbe $\mathscr{H}$, le point A, la droite $(O\,;\vec{i})$ et représenter la partie hachurée précédente dans le repère $(O\,;\vec{I}, \vec{J})$.

7.3. Calculer l'aire $\mathcal{A}(c(a))$ en fonction de $a$.

7.4. Conclure.

## Problème 2

***Notations***

Dans tout le problème, on considère A, B, C trois points non alignés du plan $\mathcal{E}_2$.

On adopte les notations suivantes :

- Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre O et pour rayon $R$ ;
- Le cercle inscrit dans le triangle ABC a pour centre $\omega$ et pour rayon $r$ ;
- $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ désignent les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB] ;
- $M_A$, $M_B$ et $M_C$ désignent les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] ;
- $H_A$, $H_B$ et $H_C$ désignent les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C;
- $\Delta_A$, $\Delta_B$, $\Delta_C$ désignent les bissectrices intérieures du triangle ABC respectivement issues des sommets A, B, C et A', B', C' désignent les points d'intersection de $\Delta_A$, $\Delta_B$, $\Delta_C$ respectivement avec les droites (BC), (AC), (AB).

***Pour répondre aux différentes questions, il est vivement conseillé de faire plusieurs schémas qui pourront servir de supports aux divers raisonnements.***

## Partie I

## Caractérisation de l'intérieur d'un triangle

*Soit* D *une droite du plan et* A *un point n'appartenant pas à la droite* D*. On note* H *le pied de la perpendiculaire à la droite* D*, issue de* A*,* $\vec{u}$ *un vecteur directeur unitaire de la droite* D *et on pose* $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HA}}}{\mathrm{HA}}$.

*On appelle demi-plan ouvert délimité par la droite* D *et contenant le point* A *[resp. ne contenant pas le point* A*] l'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x, y)$ *dans le repère* $(\mathrm{H}\,;\vec{u},\vec{v})$ *tels que* $y > 0$ *[resp.* $y < 0$*].*

*L'intérieur d'un triangle ABC non aplati est, par définition, l'intersection des trois demi-plans ouverts délimités respectivement par les droites (AB), (BC) et (AC) et contenant respectivement les points C, A et B.*

1. Soient B et C deux points distincts appartenant à la droite D.

Démontrer qu'un point M du plan appartient au demi-plan ouvert délimité par la droite D et contenant le point A si et seulement si l'ordonnée du point M dans le repère $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est strictement positive.

2. Démontrer qu'un point M du plan appartient à l'intérieur du triangle ABC si et seulement si M est barycentre des points A, B et C affectés de coefficients non nuls, tous de même signe.

## Partie II

## Position du centre du cercle inscrit d'un triangle ABC non aplati

1.

1.1. Démontrer que, dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, une équation de la bissectrice $\Delta_A$ est :

$$y = \frac{\gamma}{\beta}x.$$

1.2. Déterminer, dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, une équation de la droite (BC).

1.3. Déterminer dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les coordonnées du point A', point d'intersection des droites $\Delta_A$ et (BC).

2.

2.1. Déterminer deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que le point A' soit barycentre des points B et C respectivement affectés des coefficients $\lambda$ et $\mu$.

2.2. Démontrer que le point $\omega$, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, est barycentre des points A, B et C respectivement affectés des coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, longueurs respectives des segments [BC], [AC] et [AB].

2.3. Quel résultat concernant la position du point $\omega$ relativement au triangle ABC retrouve-t-on ?

## Partie III

## Position du centre du cercle circonscrit d'un triangle ABC non aplati

$M_A$ étant le milieu du segment [BC], on munit le plan $\mathcal{E}_2$ du repère orthonormal $(M_A ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que le point B (respectivement C) ait pour coordonnées $(-\frac{\alpha}{2}, 0)$ (respectivement $(\frac{\alpha}{2}, 0)$) et que le point A ait une ordonnée strictement positive.

On note $(x_A, y_A)$ les coordonnées du point A dans ce repère.

1. Justifier que les coordonnées du point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, sont :

$$x_O = 0 \text{ et } y_O = \frac{y_A}{2} + \frac{(x_A - \frac{\alpha}{2})(x_A + \frac{\alpha}{2})}{2y_A}.$$

2. Démontrer que :

$$2\, y_O\, y_A = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

3. En déduire que, pour que les points O et A soient dans le même demi-plan ouvert déterminé par la droite (BC), il faut et il suffit que l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ soit aigu.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les angles géométriques du triangle ABC pour que le point O soit à l'intérieur du triangle ABC.

## Partie IV

## Cas particulier d'un résultat établi par Lazare Carnot (général et mathématicien français 1753 – 1823)

*On admettra que :*

> *si M est un point appartenant à l'intérieur d'un triangle ABC non aplati, l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AMB, AMC et BMC.*

1. Justifier que l'aire du triangle ABC notée $\mathcal{A}$(ABC) est telle que :

$$\mathcal{A}(\text{ABC}) = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) r$$

où $r$ désigne le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

2. On se place dans le cas où le point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, appartient à l'intérieur du triangle ABC.

2.1. Démontrer que :

$$\alpha OM_A + \beta OM_B + \gamma OM_C = 2\,\mathcal{A}(ABC). \qquad (1)$$

2.2. Justifier que le point $H_A$ (respectivement $H_B$, $H_C$) est un point du segment [BC] (respectivement [AC], [AB]).

2.3. Démontrer que les triangles $ABH_B$, $ACH_C$ et $BOM_A$ sont semblables.

2.4. En déduire l'égalité suivante :

$$(\beta + \gamma)\, OM_A = R\,(AH_B + AH_C)$$

où $R$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle *ABC*.

2.4. Ecrire les deux autres égalités qui peuvent être obtenues de manière analogue pour $OM_B$ et $OM_C$.

2.5. Démontrer alors l'égalité suivante :

$$OM_A + OM_B + OM_C = R + r. \qquad (2)$$

3. Dans cette question, le point O appartient à l'un des segments [BC], [AB] ou [AC].

3.1. Préciser la nature du triangle ABC dans ce cas.

3.2. On suppose que le point O est un point du segment [BC].

3.2.1. Démontrer qu'on a alors :

$$R + r = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad R + r = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

3.2.2. En déduire que la relation (2) est encore vérifiée dans ce cas.