1. **Résultats préliminaires**

I-A- Distance de A à A_s

I-A-1) : - Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T = A = -A$, donc $A = 0$.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A_s + A_a$.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $(A, B) = (A^T, -B^T) = -tr(AB^T) = -(A, B)$, donc $(A, B) = 0$ - $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = Vect((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\le i\le j\le n}$, donc $dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = Vect((E_{i,j} - E_{j,i})_{1\le i<j\le n})$, donc $dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

I-A-2) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement supplémentaire, alors $\|A - A_s\|_2 = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \le \|A - S\|_2$ avec égalité si la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est S, c'est à dire $S = A_s$.

I-B- Valeurs propres de A_s

I-B-1) : $\Longrightarrow$ $A_s \in S_n(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que $A_s = P^T DP$, donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A_s X = (PX)^T D(PX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ où on a posé $PX = (y_1, ..., y_n)^T$.
- Si $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $Sp(A_s) \subset \mathbb{R}^+$, donc $X^T A_s X \ge 0$.
- Si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et X non nul, alors PX est aussi non nul, donc $\exists j \in \{1, ..., n\}$ tel que $y_j \neq 0$ et par suite $X^T A_s X \ge \lambda_j y_j^2 > 0$.
$\Longleftarrow$ Supposons que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A_s X \ge 0$ (respectivement $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $X^T A_s X > 0$), et soit $\lambda \in Sp(A_s)$, alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_s X = \lambda X$, donc $X^T A_s X = \lambda X^T X$ et par suite $\lambda = \dfrac{X^T A_s X}{X^T X} \ge 0$ (respectivement $\lambda = \dfrac{X^T A_s X}{X^T X} > 0$).

I-B-2) : - Le théorème spectral assure l'existence de $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que $A_s = P^T DP$. Quitte à réordonner les colonnes de P, on peut supposer que $\lambda_1 \le ... \le \lambda_n$.
- Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ tel que $X^T X = 1$, alors en posant $PX = (y_1, ..., y_n)^T$ on aura $(PX)^T(PX) = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

$\lambda = X^T AX = X^T A^T X = \dfrac{1}{2}(X^T AX + X^T A^T X) = X^T A_s X = (PX)^T D(PX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, donc

$\lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \le \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_n$, c'est à dire $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_n$.
- Si de plus $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1 > 0$, donc l'inégalité de gauche précédente montre que 0 ne peut être une valeur propre de A, c'est à dire A est inversible.

I-B-3) :

a) - Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ qui sont assurées par le théorème spectral, tel que $A_s = PDP^{-1} = PDP^T$.
$Sp(A_s) \subset \mathbb{R}^{*+}$, on pose $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$, alors $\Delta^2 = D$ et $A_s = PDP^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2 = B^2$ où $B = P\Delta P^T$ qui est clairement symétrique de spectre celui de Δ dans $\mathbb{R}^{*+}$, donc $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Pour l'unicité, on utilise les polynômes de Lagrange.
Soit Q le polynôme de Lagrange vérifiant $Q(\sqrt{\lambda_i}) = \lambda_i$, alors $\Delta = Q(D)$, donc $B = Q(A_s)$ et B est donc un polynôme en A_s.
- Soit C une matrice vérifiant $C^2 = A_s$, alors $B^2 = C^2$ et puisque B et C sont des polynômes en A_s, ils commutent entre eux et par suite $0 = B^2 - C^2 = (B - C)(B + C)$, or $B, C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $B + C$ inversible, ce qui entraine que $B = C$.
- On peut utiliser une deuxième méthode.
Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $B^2 = A$, alors $\forall\lambda \in Sp(A)$ $X^2 - \lambda = (X - \sqrt{\lambda})(X + \sqrt{\lambda})$ et le lemme des noyaux entraine $Ker(A - \lambda I_n) = Ker(B^2 - \lambda I_n) = Ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) \bigoplus Ker(B + \sqrt{\lambda} I_n)$, or $Sp(B) \subset \mathbb{R}^{*+}$, donc $Ker(B + \sqrt{\lambda} I_n) = \{0\}$ et par suite $Ker(A - \lambda I_n) = Ker(B - \sqrt{\lambda} I_n)$.

- Avec cette égalité on aura, $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = \sum_{\lambda \in Sp(A)} X_\lambda$ où $X_\lambda \in Ker(A - \lambda I_n)$, alors $BX = \sum_{\lambda \in Sp(A)} BX_\lambda = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \sqrt{\lambda} X_\lambda$, cette écriture ne dépend pas de la matrice B, ce qui assure l'unicité de B.

b) $A = A_s + A_a = B^2 + A_a = B(I_n + B^{-1}A_aB^{-1})B = B(I_n + Q)B$ où on a posé $Q = B^{-1}A_aB^{-1}$. On vérifie bien que $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $det(A) = det(B^2)det(I_n + Q) = det(Q_s)det(I_n + Q)$.

c) $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc sa partie symétrique est nulle, et d'après $I - B - 2)$, ses valeurs propres réelles sont nulles.
Soit λ une valeur propre complexe non nulle, alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $QX = \lambda X$, donc $\overline{X}^T QX = \lambda \overline{X}^T X$, les deux termes $\overline{X}^T QX$ et $\overline{X}^T X$ sont réels, donc en transposant, on obtient $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, c'est à dire les valeurs propres complexes sont des imaginaires purs, et par suite en trigonalisant dans $\mathbb{C}$, on obtient $det(I_n + Q) = \prod_{k=1}^{p}(1 + |\lambda_k|^2) \geq 1$ où $Sp_{\mathbb{C}}(Q) = \{i\lambda_1, -i\lambda_1, ..., i\lambda_p, -i\lambda_p\}$. Les $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$. On conclut que $det(A) \geq det(A_s)$.

I-B-4) : La matrice $A(A^{-1})_sA^T$ est symétrique, de plus $A(A^{-1})_sA^T = A(A^{-1} - (A^{-1})_a)A^T = A^T - A(A^{-1})_aA^T = A_s - A_a - A(A^{-1})_aA^T$, donc en prenant la partie symétrique, on obtient $A(A^{-1})_sA^T = A_s$ et par suite $det(A(A^{-1})_sA^T) = det(A_s) = (det(A))^2 det((A^{-1})_s)$.
On a de même $A(A^{-1})_aA^T = -A_a$.

I-C- Partie symétrique des matrices orthogonales

I-C-1) : $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors elle est orthogonalement semblable à une matrice $T = diag(I_p, -I_q, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_r})$ où $p + q + 2r = n$ et $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i) \end{pmatrix}$
Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PTP^T = PT_sP^T + PT_aP^T$, donc $A_s = PT_sP^T$ avec $T_s = diag(I_p, -I_q, cos(\theta_1), cos(\theta_1), ..., cos(\theta_r), cos(\theta_r))$ et par suite $Sp(A_s) = Sp(T_s) \subset [-1, 1]$.

I-C-2) : - Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $Sp(S) = \{0, 1\}$.
Si $A \in O_2(\mathbb{R})$ est de partie symétrique S, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ qui est clairement non orthogonale.

I-C-3) :

a) $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, les valeurs propres de S dans]-1,1[sont de multiplicité paire, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $T = diag(I_p, -I_q, \lambda_1 I_2, ..., \lambda_r I_2)$ où les λ_i ne sont pas nécessairement distinctes, contenues dans $]-1, 1[$ et tel que $S = PTP^T$.
- Si on pose pour $i \in \{1, ..., r\}$, $Q_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & -\alpha_i \\ \alpha_i & \lambda_i \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i^2 + \alpha_i^2 = 1$,alors $Q_i \in O_2(\mathbb{R})$ et $(Q_i)_s = \lambda_i I_2$.
Considérons $A = Pdiag(I_p, -I_q, Q_1, ..., Q_r)P^T$, alors $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $A_s = S$.

b) Supposons qu'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A_s = S$, alors d'après $I - C - 1)$, $Sp_{\mathbb{R}} \subset [-1, 1]$.
Soit $\lambda \in]-1, 1[$ une valeur propre de S et f la restriction à $E_\lambda(S)$, de l'endomorphisme canonique associé à S, alors $f = \lambda id_{E_\lambda(S)}$.
Mais f est la partie symétrique d'une matrice orthogonale, donc $\lambda I_{dim(E_\lambda(S))}$ est semblable à une matrice de la forme $T = diag(I_p, -I_q, \lambda_1 I_2, ..., \lambda_r I_2)$ avec $p + q + 2r = dim(E_\lambda(S))$, or la condition $\lambda \in]-1, 1[$ exige $p = q = 0$, donc $dim(E_\lambda(S)) = 2r$ est paire.

2. Matrices F-singulieres

II-A- Cas où F est un hyperplan

II-A-1) : $\Longrightarrow$ Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ singulière, alors $\exists X \in E_n$ non nul tel que $MX = 0$, donc $\forall Y \in E_n$, $Y^TMX = 0$, c'est à dire M est E_n-singulière.
$\Longleftarrow$ Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est E_n-singulière, alors $\exists X \in E_n$ non nul, tel que $\forall Z \in E_n$, $Z^TMX = 0$.
En particulier pour $Z = MX$, on obtient $(MX)^T(MX) = 0$, donc $MX = 0$ et par suite M est singulière.

II-A-2) : A est H-singulière si, et seulement si, $\exists X \in H$ non nul tel que $\forall Z \in H$, $Z^TAX = (Z|AX) = 0$ si, et seulement si, $\exists X \in H$ non nul tel que $AX \in H^\perp = Vect(N)$, si, et seulement si, $\exists X \in H$ non nul et un réel λ tels que $AX = \lambda N$.

II-A-3) : $\Longrightarrow$ Supposons que A est H-sigulière, alors d'après la question précédente, $\exists X \in H$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $AX = \lambda N$.

- Posons $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix}$, alors Y est non nul et $(N|X) = 0$ et par un calcul simple on obtient $A_N Y = 0$, donc A_N est singulière.

$\Longleftarrow$ Supposons que A_N est singulière, alors $\exists Y = \begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix}$ non nul tel que $A_N Y = 0$, donc $\begin{cases} AX + \lambda N = 0 \\ N^T X = 0 \end{cases}$.

X est nécessairement non nul, si non $\lambda N = 0$, donc $\lambda = 0$, et par suite $Y = 0$, ce qui contredit que Y est non nul.

- L'égalité $N^T X = 0$ assure que $X \in H$ et l'autre égalité donne $AX = -\lambda N$, et par le résultat de la question précédente, A est H-singulière.

II-A-4) : Le produit par blocs donne $A_N B = \begin{pmatrix} AB_1 + NB_3 & AB_2 + NB_4 \\ N^T B_1 & N^T B_2 \end{pmatrix}$, donc la matrice $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ répond à la question.

II-A-5) : B et $A_N B$ sont triangulaires par blocs,donc $det(B) = det(A^{-1})$ et $det(A_N B) = -N^T A^{-1} N$, donc $det(A_N B) = det(A_N) det(B) = det(A_N) det(A^{-1}) = -N^T A^{-1} N$, et par suite $det(A_N) = -N^T A^{-1} N det(A)$.

II-A-6) : $(A^{-1})_s$ n'est pas inversible, donc $\exists N \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ qu'on choisit unitaire tel que $(A^{-1})_s N = 0$, On complète N en une base orthonormée pour le produit scalaire $(.|.)$, donc dans cette nouvelle base, $A^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$ où $X \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ grâce à l'inversibilité de A^{-1}.

Ceci montre que $N^T A^{-1} N = (1, 0, ..., 0) \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = 0$,donc d'après la question $II - A - 5)$, A_N est singulière et la question $II - A - 3)$ assure l'existence de H tel que A est H-singulière.

II-A-7) : Si $det(A_s) = 0$, alors d'après la question $I - B - 4)$, $(det(A))^2 det((A^{-1})_s) = det(A_s)$, donc $det((A^{-1})_s) = 0$ et la qusetion précédente donne le résultat.

II-A-8) : Supposons que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors l'égalité $A(A^{-1})_s A^T = A_s$ déjà démontré dans la question $I - B - 4)$ montre que $(A^{-1})_s$ est aussi dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et par la question $I - B - 3)$, $(A^{-1})_s = B^2$ où $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Raisonnons par l'absurde et supposons que A est H-singulière pour un certain hyperplan H, alors d'après $II - A - 5)$, $N^T A^{-1} N = 0$, donc $N^T (A^{-1})_s N = (BN)^T (BN) = 0$, ce qui conduit à la contradiction $BN = 0$.

II-B- Exemple

II-B-1) : $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $det(A(\mu)) = 1$.

II-B-2) : $(A(\mu))_s = \dfrac{1}{2}((A(\mu))^T + A(\mu)) = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu/2 \\ -1 & 2-\mu & \mu/2 - 1 \\ \mu/2 & \mu/2 - 1 & 1 \end{pmatrix}$

- On commence par l'opération élémentaire $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$ suivie des opérations $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \longleftarrow C_3 + C_1$, on aboutit à $det((A(\mu)_s)) = \dfrac{1}{2}(\mu - 1)(\mu^2 - 2\mu - 2)$.

II-B-3) : $(A(1))_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, alors si $N = (1, 1, 0)^T$, alors $(A(1))_s N = 0$, donc un hyperplan est H l'orthogonal de $Vect(N)$.

II-C- Cas où F est de dimension $n - 2$

II-C-1) : A est F-singulière si, et seulement si, $\exists X \in F$ tel que $\forall Z \in F$, $(Z|AX) = 0$, si, et seulement si, $\exists X \in F$, non nul tel que $AX \in F^\perp = Vect(N_1, N_2)$, si, et seulement si, $\exists X \in F$ non nul, $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$.

II-C-2) : $\Longrightarrow$ Supposons que A est F-singulière, alors d'après la question précédente, $\exists X \in F$ non nul, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$, donc $(N_1|X) = (N_2|X) = 0$, donc si on pose $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$, on aura $A_N Y = 0$ et par suite $A_N$est sigulière.

$\Longleftarrow$ Supposons $\exists Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $A_N Y = 0$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} X \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, où $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors X est non nul, si non la condition $A_N Y = 0$ s'écrit $\left\{ \begin{array}{c} AX + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \\ (N_1|X) = 0, (N_2|X) = 0 \end{array} \right.$ et entraine $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0$ et la liberté de (N_1, N_2) donne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, donc $Y = 0$.

Donc X non nul orthogonal à N_1 et à N_2, c'est à dire $X \in F$, de plus $AX = -\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$, ce qui donne par la question précédente que A est F-singulière.

II-C-3) : Un calcul analogue à celui de la question $II-A-4)$ nous invite à prendre $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$

II-C-4) : le même calcul déjà fait dans la question $II - A - 5)$ donne l'égalité.

II-C-5) : $\Longrightarrow$ Supposons $\exists P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$tel que $det(P^T A^{-1} P) = 0$, le produit par une matrice inversible conserve le rang , donc si on pose $P' = A^{-1}P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ on aura $0 = det(P^T A^{-1} P) = det(P'^T A^T P')$ et en transposant on obtient $det(P'^T A P') = 0$.

$\Longleftarrow$ En remplaçant P par P' et A^{-1} par A dans la première implication, on obtient la réciproque.

II-C-6) : $N'^T A N' = \begin{pmatrix} N_1'^T \\ N_2'^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} N_1' & N_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1'^T A N_1' & N_1'^T A N_2' \\ N_2'^T A N_1' & N_2'^T A N_2' \end{pmatrix}$, donc

$det(N'^T A N') = (N_1'^T A N_1')(N_2'^T A N_2') - (N_1'^T A N_2')(N_2'^T A N_1') =$

$= (N_1'^T A_s N_1')(N_2'^T A_s N_2') + (N_1'^T A_s N_1')(N_2'^T A_a N_2') + (N_1'^T A_a N_1')(N_2'^T A_s N_2') + (N_1'^T A_a N_1')(N_2'^T A_a N_2') +$

$-(N_1'^T A_s N_2')(N_2'^T A_s N_1') - (N_1'^T A_s N_2')(N_2'^T A_a N_1') - (N_1'^T A_a N_2')(N_2'^T A_s N_1') - (N_1'^T A_a N_2')(N_2'^T A_a N_1')$.

Posons $\alpha_{i,j} = (N_i'^T A_s N_j')$ et $\beta_{i,j} = (N_i'^T A_a N_j')$.

Alors $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$, $\beta_{i,j} = -\beta_{j,i}$, donc $\beta_{i,i} = 0$, et par suite

$det(N'^T A N') = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} + \alpha_{1,1}\beta_{2,2} + \beta_{1,1}\alpha_{2,2} + \beta_{1,1}\beta_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1} - \alpha_{1,2}\beta_{2,1} - \beta_{1,2}\alpha_{2,1} - \beta_{1,2}\beta_{2,1} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - (\alpha_{1,2})^2 + (\beta_{1,2})^2$.

II-C-7) : L'égalité $A_s = A(A^{-1})_s A^T$ vu à la question $I - B - 4)$ montre que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow (A^{-1})_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc l'application $(X, Y) \longmapsto X^T (A^{-1})_s Y$ définie un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de plus (N_1, N_2) est libre, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte et s'écrit

$(N_1^T (A^{-1})_s N_2)^2 < (N_1^T (A^{-1})_s N_1)(N_2^T (A^{-1})_s N_2)$, ce qui donne d'après $II - C - 6)$

$det(N^T A^{-1} N) \geq (N_1^T (A^{-1})_s N_1)(N_2^T (A^{-1})_s N_2) - (N_1^T (A^{-1})_s N_2)^2 > 0$.

II-C-8) : Par l'absurde, supposons que A est F-singulière pour un certain sous-espace F de dimension $n-2$, alors si on note $N = (N_1, N_2) \in M_{n,2}(\mathbb{R})$ une base de $F^\perp$, on aura A_N est singulière, donc $det(A_N) = det(N^T A^{-1} N) det(A) = 0$, or d'après $I-B-2)$, A est inversible, donc $det(N^T A^{-1} N) = 0$, ce qui contredit la question précédente.

II-D- Exemple

II-D-1) : On va choisir N_2' tel que $A_s N_2' = 0$ et N_1' tel que $A_a N_1' \perp N_2'$ avec (N_1', N_2') libre.

Déjà d'après $II - B - 3)$, $A_s N_2' = 0$ pour $N_2' = (1, 1, 0)^T$.

$A_a N_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, il suffit de choisir $N_1' = (1, 0, 0)^T$, donc $N_1'^T A_a N_2' = 0$, et l'égalité établie en $II - C - 6)$ entraine que $det(N'^T A N' = 0)$.

II-D-2) : L'équation du plan $Vect(N_1', N_2')$ est $x - y = 0$, donc F est la droite normale à ce plan, c'est $Vect((1, -1, 0)^T)$.

II-E- Cas général

II-E-1) : Considérons $N' = (N_1, ..., N_p) \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ une base de $F^\perp$.

Un calcul analogue à celui déjà fait à la partie C, conduit à que A est F-singulière si $det(N'^T A N') = 0$.

II-E-2) : $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul, donc $N'X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, et par suite $X^T N'^T A N' X = (N'X)^T A (N'X) = (N'X)^T A_s (N'X) > 0$.

II-E-3) : Soit λ une valeur propre réelle de $N'^T A N'$, alors $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $N'^T A N' X = \lambda X$, donc $X^T N'^T A N' X = \lambda X^T X$ et donc $\lambda = \dfrac{X^T N'^T A N' X}{X^T X} > 0$.

II-E-4) : Soit $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres réelles de $N'^T A N'$ qui sont strictement positifs d'après la question précédente et $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, ..., \alpha_q, \overline{\alpha_q}$ ses valeurs propres complexes avec $r + 2q = p$, alors $det(N'^T A N') = \lambda_1 ... \lambda_r |\alpha_1|^2 ... |\alpha_q|^2 > 0$.

II-E-5) : Si A est F-singulière pour un certain sous-espace $F \neq \{0\}$, alors $F \neq E_n$ puisque A inversible, donc de codimension $1 \leq p \leq n-1$, alors $A_{N'}$ est singulière, donc $det(N'^T A^{-1} N') = 0$, or $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}\mathbb{R} \iff (A^{-1})_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après la question précédente $det(N'^T A^{-1} N') > 0$, ce qui est absurde.

3. **Matrices positivement stables**

III-A- Exemples

III-A-1) : Soit α, β les valeurs propres rélles de A. Si elles sont complexes, on note $\alpha = p + iq$ et $\beta = p - iq$.
$\Longleftarrow$ Supposons que A est positivement stable, alors la condition $det(A) = \alpha\beta > 0$ exige que α et β ont même signe, et puisque $tr(A) > 0$, on aura $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ où $p > 0$.
$\Longrightarrow$ Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $p > 0$, alors c'est évident que $tr(A) > 0$, $det(A) > 0$.

III-A-2) :

a) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont positivement stables, mais leur somme $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est de déterminant nul, donc n'est pas positivement stable.

b) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices positivement stables qui commutent, alors A et B sont cotrigonalisables dans $\mathbb{C}$.
Alors si on pose $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ et $Sp(B) = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$, alors $Sp(A+B) = \{\lambda_1 + \mu_1, ..., \lambda_n + \mu_n\}$, alors $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $Re(\lambda_i + \mu_i) = Re(\lambda_i) + Re(\mu_i) > 0$, donc $A + B$ est positivement stable.
• On peut raisonner autrement :
soit λ une valeur propre complexe de $A + B$, alors il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $(A+B)X = \lambda X$, donc $AX = (\lambda I_n - B)X$ et puisque $AB = BA$, alors A commute avec $\lambda I_n - B$ et par une récurrence simple, on obtient $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = (\lambda I_n - B)^k X$ et par combinaison linéaire $Q(A)X = Q(\lambda I_n - B)X$ pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$.
On applique cette égalité avec $Q = \chi_A$, on obtient $\chi_A(\lambda I_n - B)X = 0$, donc $\chi_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible, d'où l'existence de $\lambda_i \in Sp(A)$ tel que $(\lambda - \lambda_i)I_n - B$ n'est pas inversible, c'est à dire $\lambda - \lambda_i \in Sp(B)$ et par suite $\lambda = \lambda_i + \lambda_j$ où $\lambda_j \in Sp(B)$, ce qui entraine que $Re(\lambda) = Re(\lambda_i) + Re(\lambda_j) > 0$.

III-A-3) :

a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, $\overline{X}^T AX = Y^T AY + Z^T AZ + i(Y^T AZ - Z^T AY)$, donc $Re(\overline{X}^T AX) = Y^T AY + Z^T AZ$, or $Y^T A_d Y = Z^T A_d Z = 0$, donc $Re(\overline{X}^T AX) = Y^T A_s Y + Z^T A_s Z > 0$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, alors $\exists X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, donc $\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X$ et par suite $Re(\lambda) = \dfrac{Re(\overline{X}^T AX)}{\overline{X}^T X} > 0$.

III-A-4) : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors A est positivement stable, mais $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre, donc n'est pas définie positive.

III-B- Un résultat sue l'exponentielle

III-B-1) : u est solution de l'équation différentielle $y' + \lambda y = v$.
La solution de $y' + \lambda y = 0$ est $y(t) = ce^{-\lambda t}$ et la méthode de variation de la constante consiste à poser $y(t) = c(t)e^{-\lambda t}$, ce qui donne $c'(t) = v(t)e^{\lambda t}$, donc $c(t) = c + \displaystyle\int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds$ et par suite $u(t) = e^{-\lambda t}(c + \displaystyle\int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds)$.
$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|u(t)| \leq e^{-Re(\lambda)t}(|c| + \|v\|_\infty \displaystyle\int_0^t e^{Re(\lambda)s} ds) = e^{-Re(\lambda)t}(|c| + \dfrac{e^{Re(\lambda)t} - 1}{Re(\lambda)}\|v\|_\infty) \leq$
$\leq |c| + \dfrac{1 - e^{-Re(\lambda)t}}{Re(\lambda)}\|v\|_\infty \leq |c| + \dfrac{\|v\|_\infty}{Re(\lambda)}$, ce qui assure la bornitude de u sur $\mathbb{R}^+$.

III-B-2) : Posons $T = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,i} = \lambda_i$ de partie réelle strictement positive et $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

L'équation différentielle $U'(t) + TU(t) = 0$ se traduit par le système $\begin{cases} eq_1 \\ \vdots \\ eq_n \end{cases}$

où $eq_k : u'_k(t) + \lambda_k u_k(t) = -\sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j} u_j(t)$.
Montrons par récurrence déscendante que u_j est bornée pour $j \in \{1, ..., n\}$.
- On considère l'équation $eq_n : u'_n(t) + \lambda_n u_n(t) = 0$, alors la question précédente appliquée à $\lambda = \lambda_n$ et $v = 0$ assure la bornitude de u_n sur $\mathbb{R}^+$.
- Supposons que $u_n, u_{n-1}, ..., u_{k+1}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$, alors $v = -\sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j} u_j(t)$ est bornée par hypothèse de récurrence et $Re(\lambda_k) > 0$, donc la question précédente appliquée à l'équation eq_k assure la bornitude de u_k sur $\mathbb{R}^+$, ce qui achève la récurrence.

III-B-3) : A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T' \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$, donc $A - \alpha I_n = PTP^{-1}$ où $T = T' - \alpha I_n \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de valeurs propres $\lambda_1 - \alpha, ..., \lambda_n - \alpha$ avec $Re(\lambda_i - \alpha) = Re(\lambda_i) - \alpha > 0$.
Posons $M(t) = e^{\alpha t} exp(-tA) = exp(-(A - \alpha I_n)t) = P exp(-tT)P^{-1}$, alors $M'(t) + TM(t) = 0$.
Posons pour $j \in \{1, ..., n\}$, $U_j(t) = M(t)e_j$ où $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $U'_j(t) + TU_j(t) = (M'(t) + TM(t))e_j = 0$, donc d'après la question précédente, $\forall j \in \{1, ..., n\}$, U_j est bornée sur $\mathbb{R}^+$ comme fonction à composantes bornées, c'est à dire M est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III-C- Une caractérisation des matrices positivement stables

III-C-1) : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de ϕ et $M \in M_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé, alors $A^T M = M(\lambda I_n - A)$, une récurrence simple aboutit à $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A^T)^k M = M(\lambda I_n - A)^k$, donc par combinaison linéaire, $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(A^T)M = MQ(\lambda I_n - A)$, en particulier pour $A = \chi_A = \chi_{A^T}$, on obtient $M\chi_A(\lambda I_n - A) = 0$.
M étant non nulle, donc $\chi_A(\lambda I_n - A)$ n'est pas inversible et par suite $\exists \lambda_i \in Sp(A)$ tel que $(\lambda - \lambda_i)I_n - A$ n'est pas inversible, d'où l'existence de $\lambda_j \in Sp(A)$ tel que $\lambda = \lambda_i + \lambda_j$, ce qui entraine que $Re(\lambda) = Re(\lambda_i) + Re(\lambda_j) > 0$ et ϕ est positivement stable.

III-C-2) :

a) ϕ est positivement stable, donc ϕ est bijective, ce qui assure l'existence et l'unicité de B.

b) En transposant l'égalité précédente, on obtient $B^T A + A^T B^T = I_n$, donc $\phi(B) = I_n$ et $\phi(B^T) = I_n$ et par unicité, $B^T = B$,ce qui entraine la symétrie de B et avec cette symétrie, on aura $(BA)^T + BA = I_n$, donc $(BA)_s = \frac{1}{2} I_n$ et par suite $(BA)_s$ est définie positive, ce qui entraine d'après $I-B-2)$ que $det(BA) \geq det((BA)_s) > 0$,et puisque A est positivement stable, $det(A) > 0$ donc $det(B) > 0$.

III-C-3) :

a) Soit $t \in \mathbb{R}$.
La matrice $exp(-tA)$ est inversible grâce à l'égalité $exp(-tA)exp(tA) = I_n$, de plus $(exp(-tA))^T = exp(-tA)$, donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ V(t) = X^T (exp(-tA))^T exp(-tA)X =$
$= (exp(-tA)X)^T (exp(-tA)X) > 0$, donc $\forall t \in \mathbb{R},\ V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & X^T M X \end{array}$, alors φ est une forme linéaire et W est continue sur $]0, +\infty[$, donc $\forall t > 0$, $\varphi(W(t)) = \varphi(\int_0^t V(s)ds) = \int_0^t \varphi(V(s))ds$, c'est à dire
$\forall t > 0,\ X^T W(t)X = \int_0^t X^T V(s)X ds$, or l'application $s \longmapsto X^T V(s)X$ est continue sur $[0, t]$ comme composée d''applications continues à savoir φ et V, de plus on vient de montrer qu'elle est strictement positive sur $[0, t]$, donc $X^T W(t)X > 0$ et par suite $\forall t > 0,\ W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, $A^T W(t) + W(t)A = \phi(W(t))$. L'application ϕ est linéaire et W est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc $\phi o W$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est on a :
$\forall t \in \mathbb{R},\ (\phi(W(t)))' = \phi(W'(t)) = \phi(V(t)) = -V'(t)$, ce qui donne en intégrant entre 0 et t, $\phi(W(t)) - \phi(W(0)) = V(0) - V(t)$, d'où $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(W(t)) = I_n - V(t)$.

c) A étant positivement stable, et vu que $Sp(A) = Sp(A^T)$, alors il en est de même pour A^T.
Considérons α comme dans la question $II - B - 3)$, on obtient donc $\|exp(-tA)\|_2 = O(e^{-\alpha t})$ et $\|exp(-tA^T)\|_2 = O(e^{-\alpha t})$ et puisque $\|.\|_2$ est sous-multiplicative, $\|V(t)\|_2 = O(e^{-2\alpha t})$ (on peut choisir n'importe qu'elle norme sous-multiplicative) et par suite $t \longmapsto V(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui permet le passage à la limite
$\lim_{t \longrightarrow +\infty} W(t) = \int_0^{+\infty} V(s)ds$.

La continuité de ϕ permet d'écrire $\phi(\lim\limits_{+\infty} W(t)) = \lim\limits_{+\infty} \phi(t)$, de plus V dominée par $t \longmapsto e^{-2\alpha t}$, donc de limite nulle en $+\infty$. on otient $A^T \lim\limits_{+\infty} W(t) + \lim\limits_{+\infty} W(t) A = I_n$ et par unicité de la matrice B, on aura $B = \lim\limits_{+\infty} W(t)$.

- Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, le passage à la limite qui est permis par la continuité de l'application linéaire $M \longmapsto X^T M X$, dans l'égalité $X^T W(t) X \geq 0$ entraine $X^T B X \geq 0$, donc $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et vu que B est inversible $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.