

Corrigé rédigé par Philippe PATTE
philippe.patte@prepas.org

Partie I

- On suppose I non réduit à un singleton. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, résolue en y'' , homogène, à coefficients continus sur l'intervalle I . L'ensemble des solutions sur I est un espace vectoriel de dimension deux. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont deux solutions de $(\mathcal{E}_0)$, indépendantes (de wronskien constant non nul). Elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions sur I .
- On suppose que I est un voisinage de $+\infty$. On écrit g comme combinaison linéaire de $\sin$ et $\cos$: $g = A \cdot \cos + B \cdot \sin$. Alors les suites $(g(n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(g\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement $((-1)^n \cdot A)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n \cdot B)_{n \in \mathbb{N}}$. Elles ne peuvent converger que si $A = B = 0$.
- On suppose encore que I est un voisinage de $+\infty$ et on reprend les notations de la question précédente. On note l la limite de g en $+\infty$. Comme les suites $(n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, les suites $(g(n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(g\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers l . D'après la question précédente, $A = B = 0$. Donc g est la fonction nulle.

Partie II

Il faut préciser que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- L'application $\mathcal{H}$ qui envoie v sur h_v est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et V en est l'image. Donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- Il reste à justifier que $\mathcal{H}$ est injective. Soit $v = (a, b, c, d)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $h_v = 0$.
Alors $h_v(x) = 0$ et $h'_v(x) = (a + d + cx) \cos x + (c - b - ax) \sin x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc le système
$$\begin{cases} h_v(0) &= b &= 0 \\ h_v(\pi/2) &= d + c \cdot \pi/2 &= 0 \\ h'_v(0) &= a + d &= 0 \\ h'_v(\pi/2) &= c - a \cdot \pi/2 &= 0 \end{cases}.$$

On calcule a et c en fonction de d dans les équations 2 et 3 : $a = -d$; $c = -2d/\pi$; et en reportant dans la dernière équation : $d(-2/\pi - \pi/2) = 0$. D'où $d = 0$, puis $a = c = 0$. Donc $v = 0$.

Donc $\mathcal{H}$ est injective : c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ sur V . Comme $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, son image $\mathcal{B}$ est une base de V .

- Avec les notations précédentes, $h_v = a \cdot h_{e_1} + b \cdot h_{e_2} + c \cdot h_{e_3} + d \cdot h_{e_4}$ et, après deux lignes de calcul,

$$\psi(h_v) = c \cos - a \sin = c \cdot h_{e_2} - a \cdot h_{e_4}$$

- ψ est linéaire par linéarité de la dérivation, et à valeurs dans V .
- $\psi(h_v) = 0 \Leftrightarrow c = a = 0 \Leftrightarrow h_v \in \text{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$. Donc $\ker(\psi) = \text{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$. On en déduit que (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base de $\ker(\psi)$, donc $\dim(\ker(\psi)) = 2$. Le théorème du rang donne alors $\text{rg}(\psi) = \dim V - \dim \ker(\psi) = 2$.
Le calcul de $\psi(h_v)$ donne aussi $\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$ et (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base de $\text{Im}(\psi)$.
- Comme $\psi(h_{e_2}) = \psi(h_{e_4}) = 0$, que $\psi(h_{e_1}) = -h_{e_2}$ et $\psi(h_{e_3}) = h_{e_4}$, la matrice de ψ dans V vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2, donc $\dim(\text{Im}(\psi)) = \text{rg}(\psi) = 2$. L'image de ψ contient les éléments indépendants h_{e_2} et h_{e_4} : donc (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base ψ .

4. $\cos = h_{e_2} = -\psi(h_{e_1})$. Donc $-h_{e_1} : x \mapsto -x \cos x$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$. On en déduit la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$: somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$, soit $x \mapsto -x \cos x + A \cos x + B \sin x$ avec A et B constantes réelles.

Partie III

1. Soit x un réel positif.

1a. $\forall t \in \mathbb{R}_+, e^{-tx} \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{1+t^2}$, donc $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$.

1b. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, elle est positive. D'après 1b, elle est dominée au voisinage de $+\infty$ par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x, t) dt$ est convergente.

2. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
- * Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- * Domination : $\forall x, t \in \mathbb{R}_+, \left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est indépendante de x , continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (id 1b).

Le théorème affirme alors la continuité de G sur $\mathbb{R}_+$.

- 3a. Les fonctions polynômes $(x, t) \mapsto -xt$ et $(x, t) \mapsto 1+t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et la seconde ne s'annule pas. Par composition avec la fonction exponentielle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis quotient, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = -tF(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$.

- 3b. Pour $t \geq 0$, ou bien $t \leq 1 \leq 1+t^2$, ou bien $t \leq t^2 \leq 1+t^2$; donc $\frac{t}{1+t^2} \leq 1$. Donc $\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$. Si $x \geq \epsilon$, alors $\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\epsilon t}$.

(i) Même raisonnement qu'au 1b en remarquant que $e^{-\epsilon t}$ est dominée au voisinage de $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$.

(ii) On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous une intégrale.

- * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $F(x, \cdot) : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- * $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe sur $] \epsilon, +\infty[\times \mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \epsilon$, la fonction $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
- * Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\frac{\partial F}{\partial x}(\cdot, t) : x \mapsto -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $] \epsilon, +\infty[$.
- * Domination : $\forall x > \epsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq e^{-\epsilon t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-\epsilon t}$ est indépendante de x , continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $] \epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in] \epsilon, +\infty[, G'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

- 3c. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage du type $] \epsilon, +\infty[$ avec $\epsilon > 0$ et que la dérivabilité est une notion locale, la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

4. On note $\phi(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = -tF(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ de sorte que $\forall x \in]0, +\infty[, G'(x) = \int_0^{+\infty} \phi(x, t) dt$.

Soit $\epsilon > 0$.

- * Pour tout $x > \epsilon$, la fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- * $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ existe sur $]\epsilon, +\infty[\times \mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \epsilon$, la fonction $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
- * Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\frac{\partial \phi}{\partial x}(\cdot, t) : x \mapsto \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]\epsilon, +\infty[$.
- * Domination : $\forall x > \epsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq e^{-\epsilon t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-\epsilon t}$ est indépendante de x , continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G' est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

On termine comme au 3c : la fonction G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même de classe $\mathcal{C}^2$) et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

5. $G(x) + G''(x)$
 $= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{1}{-x} e^{-xt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$
Donc G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.
- 6a. Pour tout $x > 0$, $G'(x) \leq 0$ et G est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc G est une application décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
- 6b. Comme G est décroissante et minorée par 0 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $G(x)$ admet une limite finie positive lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour $x > 0$: comme $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, on a $0 \leq G(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. Donc $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Partie IV

1. La suite (u_n) est croissante et f décroissante. La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme elle est de limite nulle, la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (critère des séries alternées).
2. Au voisinage de 0, $\sin(t)f(t) \sim tf(t)$, donc $\sin(t)f(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. On en déduit que la fonction $|\sin(t)|f(t)$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur l'intervalle $[0, x]$ pour tout $x > 0$ et, plus généralement, sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
- 3a. Sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$, par décroissance de f et positivité de $|\sin(t)|$, on a l'encadrement

$$|\sin(t)| f((n+1)\pi) \leq |\sin(t)| f(t) \leq |\sin(t)| f(n\pi).$$

En intégrant, on obtient

$$f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt \leq w_n \leq f(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt.$$

Comme $\sin$ est de signe constant sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ (celui de $(-1)^n$),

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t) dt \right| = \dots = 2.$$

D'où l'encadrement demandé.

- 3b. Comme $2f$ est une fonction continue sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, il existe $u_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$.

3c. Sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin(t) = \sin(t - n\pi + n\pi) = (-1)^n \underbrace{\sin(t - n\pi)}_{\geq 0} = (-1)^n |\sin(t)|$.

D'où l'égalité $w_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)f(t) dt$.

4. On note $p_n = \int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t) dt$ et $q_n = \int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t) dt$.

$$\begin{aligned} 4a. \quad p_{n+1} - p_n &= \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin(t)f(t) dt = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t) dt + \int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} \sin(t)f(t) dt \\ &= (-1)^{2n} w_{2n} + (-1)^{2n+1} w_{2n+1} = w_{2n} - w_{2n+1}. \end{aligned}$$

Comme au 1, $(f(u_n))$ est décroissante. Donc (w_n) est décroissante et $p_{n+1} - p_n \geq 0$ pour tout n . Conclusion : (p_n) est croissante.

4b. De même, $q_{n+1} - q_n = -w_{2n+1} + w_{2n+2} \leq 0$. Donc (q_n) est décroissante.

4c. $q_n - p_n = (-1)^n w_n = 2(-1)^n f(u_n)$. Comme f a une limite nulle en $+\infty$ et que (u_n) tend vers $+\infty$, $(q_n - p_n)$ tend vers 0. Les deux suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune.

5. On déduit de la question 4 que la suite $\left\{ \int_0^{n\pi} \sin(t)f(t) dt \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain l .

Soit maintenant $y \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi \leq y < (n+1)\pi$: n est la partie entière de y/π .

$$\text{Alors } I_f(0, y) = \int_0^{n\pi} \sin(t)f(t) dt + \int_{n\pi}^y \sin(t)f(t) dt.$$

Dans cette somme, comme n tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers l quand y tend vers $+\infty$.

De plus $|\int_{n\pi}^y \sin(t)f(t) dt| \leq \int_{n\pi}^y |\sin(t)| f(t) dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| f(t) dt = w_n$. Comme w_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_{n\pi}^y \sin(t)f(t) dt$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$.

Finalement, $I_f(0, y)$ tend vers l quand y tend vers $+\infty$.

Pour terminer, $I_f(x, y) = I_f(0, y) - I_f(0, x)$ tend vers $l - I_f(0, x)$ quand y tend vers $+\infty$.

6 Il suffit de vérifier que $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ satisfait les hypothèses de la partie IV, ce qui est immédiat.

Partie V

1. Immédiat !!!

2. Le changement de variables ($u = t + x$) est immédiat à repérer, mais aucun théorème du cours ne l'autorise car la fonction sous l'intégrale n'est pas intégrable. On le fait en revenant à la définition.

$$\int_0^y \frac{\sin(t)}{t+x} dt = \int_x^{x+y} \frac{\sin(u-x)}{u} du. \text{ Puis on fait tendre } y \text{ vers } +\infty \text{ et on obtient l'égalité annoncée dans l'énoncé.}$$

3. En écrivant $\sin(t-x) = \sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t)$ et en posant dans l'une des intégrales $u = t - \pi/2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{\sin(t-x)}{t} dt &= \cos(x) \int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^y \frac{\cos(t)}{t} dt \\ &= \cos(x) \int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt - \sin(x) \int_{\pi/2}^y \frac{\cos(t)}{t} dt \\ &= \cos(x) \int_0^y \frac{\sin(t)}{t} dt - \cos(x) \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt - \sin(x) \int_0^{y-\pi/2} \frac{\sin(u)}{u+\pi/2} du \end{aligned}$$

On fait tendre y vers $+\infty$:

$$H(x) = \cos(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \cos(x) \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt - \sin(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+\pi/2} du.$$

Comme $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même $\mathbb{R}_+$) de dérivée $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. De même, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$.

Par produit et combinaison linéaire, H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} H'(x) &= -\sin(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt - \cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{x} \\ &\quad + \cos(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt + \sin(x) \cdot \frac{\cos(x)}{x} - \cos(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u + \pi/2} du \end{aligned}$$

D'où

$$H'(x) = -\sin(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt + \cos(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt - \cos(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u + \pi/2} du.$$

De même, H' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} H''(x) &= -\cos(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt + \cos(x) \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \cdot \frac{\sin(x)}{x} \\ &\quad - \sin(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt + \cos(x) \cdot \frac{\cos(x)}{x} + \sin(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u + \pi/2} du \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} H''(x) &= -\cos(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt + \cos(x) \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt + \frac{1}{x} + \sin(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u + \pi/2} du \\ &= -H(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4. On reprend l'expression de la question 3 :

$$\begin{aligned} H(x) &= \cos(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \cos(x) \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt + \sin(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t} dt - \sin(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u + \pi/2} du \\ &= \cos(x) \underbrace{\left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right\}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \sin(x) \underbrace{\left\{ \int_0^{x-\pi/2} \frac{\sin(u)}{u + \pi/2} du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u + \pi/2} du \right\}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \end{aligned}$$

Comme $\sin$ et $\cos$ sont bornées, $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5. La fonction $H - G$ est solution de l'équation $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et a une limite finie 0 en $+\infty$. D'après la première partie, c'est donc la fonction nulle. Donc $G = H$ sur $\mathbb{R}_+^*$.