

I Préliminaire important

1°) Construction d'une base orthonormale directe

1.a) Δ est normale au plan d'équation $x + y + z = 0$, donc engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\|e'_1\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1, e'_1 \text{ est un vecteur normé dirigeant } \Delta.$$

1.b) Les coordonnées de e'_2 vérifient l'équation de $\mathcal{P}$, $e'_2 \in \mathcal{P}$.

1.c) Il suffit de prendre $e'_3 = e'_1 \wedge e'_2$, ses coordonnées sont donc $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2°)

2.a) Les coordonnées de $f_{a,b,c}(e'_1)$ sont $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a+b+c \\ c+a+b \\ b+c+a \end{pmatrix} = (a+b+c)e'_1$.

e'_1 est propre pour f et la valeur propre $a+b+c$.

2.b) e'_2 et e'_3 sont des vecteurs normés, orthogonaux de $\mathcal{P}$.

Celui ci est de dimension 2, ces deux vecteurs en forment donc une base orthonormale.

2.c) $f_{a,b,c}(e'_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a-b \\ c-a \\ b-c \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, car il est normal à e'_1 .

$$f_{a,b,c}(e'_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} a+b-2c \\ c+a-2b \\ b+c-2a \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \text{ car il est aussi normal à } e'_1.$$

2.d) Soit $u \in \mathcal{P}$, alors, $u = ae'_2 + be'_3$, et $f_{a,b,c}(u) = af_{a,b,c}(e'_2) + bf_{a,b,c}(e'_3) \in \mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ est stable par $f_{a,b,c}$.

II Quelques exemples

3°)

3.a) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, son déterminant est 1, le rang de J est 3, la matrice est inversible.

$$\begin{aligned} 3.b) P_J(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1). \end{aligned}$$

Ce polynôme n'est pas scindé, J n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3.c) La matrice cherchée est $J' = P^{-1}JP = {}^tPJP$.

$$\text{Avec } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3.d) ψ est donc la rotation d'axe dirigé et orienté par e'_1 , et d'angle $2\pi/3$.

4°) Matrice M_2

$$4.a) M_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ donc } M_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ qui est inversible.}$$

Donc M_2 est de rang 3.

4.b) $M_2^2 = I_3$, donc, $s \circ s = \text{Id}$, s est une symétrie.

Ici, M_2 est orthogonale et symétrique dans une base orthonormale. C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale. Les deux sous-espaces propres sont orthogonaux.

$$M_2 - I_3 = \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son noyau est le plan d'équation $x + y + z = 0$, c'est $\mathcal{P}$.

ψ est donc la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

$\ker(s - \text{Id}) = \mathcal{P}$ et $\ker(s + \text{Id}) = \Delta$.

4.c) 1 est valeur propre double et -1 est valeur propre simple, $P_{M_2}(\lambda) = (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$.

5°) Matrice M_1

$$5.a) M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

M_1 est clairement de rang 1, non inversible.

$$5.b) P_{M_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1/3 - \lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 - \lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 1/3 & 1/3 - \lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 - \lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -\lambda & 0 \\ 1/3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\lambda^2$$

5.c) 0 est valeur propre double, le sous espace propre associé est le noyau de M_1 , c'est $\mathcal{P}$.

1 est valeur propre simple, le sous espace propre associé est le noyau de $M_1 - I_3$,

$$\text{le noyau de } \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Cela correspond au système } \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

Finalement $E_1 = \Delta$

On aurait pu le deviner, la matrice est symétrique réelle, les sous-espaces propres sont orthogonaux !

5.d) La somme des dimensions des sous espaces propres est 3, M_1 est diagonalisable.

Les valeurs propres sont 0 et 1, c'est la matrice de la projection orthogonale sur Δ .

III Étude des matrices $M(a, b, c)$

6°) $j^3 = \exp(2i\pi) = 1$.

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0.$$

$$7°) J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2.$$

8°) Étude de J

- 8.a) On utilise le 3.b), les valeurs propres de J sont 1, simple, et les racines (complexes) de $1 + \lambda + \lambda^2$, c'est à dire j et $\bar{j} = j^2$, simples aussi.

8.b) On a déjà vu que $E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

E_j est le noyau de $\begin{pmatrix} -j & 1 & 0 \\ 0 & -j & 1 \\ 1 & 0 & -j \end{pmatrix}$

Cela correspond au système $\begin{cases} -jx + y = 0 \\ -jy + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = jx \\ z = j^2x \end{cases}$.

$E_j = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

Le même calcul donne $E_{j^2} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

Finalement, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

8.c) $D^2 = P^{-1}JP P^{-1}JP = P^{-1}J^2P$, et, $P^{-1}I_3P = I_3$.

On a aussi $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$.

9°)

9.a) $P^{-1}M(a, b, c)P = P^{-1}(aI_3 + bJ + cJ^2)P = aP^{-1}I_3P + bP^{-1}JP + cP^{-1}J^2P = aI_3 + bD + cD^2$
 $= \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$.

$M(a, b, c)$ est bien diagonalisable, les valeurs propres sont bien $a + b + c$, $a + bj + cj^2$, $a + bj^2 + cj$.

- 9.b) On sépare les parties réelles et imaginaires.

$a + b + c = (a + b + c) + 0i$,

$a + bj + cj^2 = \left(a - \frac{b+c}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$,

$a + bj^2 + cj = \left(a - \frac{b+c}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$.

- 9.c) Les valeurs propres sont donc réelles si et seulement si $b - c = 0$, ou encore $b = c$.

- 10°) Le polynôme caractéristique n'est pas, dans le cas où $b \neq c$, scindé sur $\mathbb{R}$.

La matrice n'est donc pas diagonalisable.

- 11°) Etude de $f_{a,b,b}$

- 11.a) Les valeurs propres sont donc réelles, données par les formules $a + 2b$ et $a - b$.

Quand $b = 0$, alors a est valeur propre triple et $E_a = E$.

Quand $b \neq 0$, $a + 2b$ est valeur propre simple et $a - b$ double.

La matrice est symétrique réelle, diagonalisable, et les sous-espaces propres sont orthogonaux.

E_{a-b} est le noyau de $\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$, c'est $\mathcal{P}$.

Et donc, E_{a+2b} est Δ .

11.b) La matrice étant diagonalisable, l'endomorphisme l'est aussi !

Une matrice Q convenable est la matrice P du 3.c).

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et alors, } D(a, b) = Q^{-1}M(a, b, b)Q = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Le calcul explicite est inutile, le premier vecteur colonne dirige Δ , les deux autres $\mathcal{P}$.

IV Étude des projecteurs

12°)

12.a) Les valeurs propres de $f_{a,b,c}$ sont celles de $M(a, b, c)$.

Il s'agit donc des résultats du 10°) et du 11.a).

12.b) Pour que le couple de valeurs propres soit $\{0, 1\}$, on a deux cas :

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ a-b=1 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} a+2b=1 \\ a-b=0 \end{cases}.$$

$$\text{Cela correspond à } \begin{cases} a=2/3 \\ b=-1/3 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} a=1/3 \\ b=1/3 \end{cases}.$$

12.c) f est un projecteur $\Leftrightarrow f$ est diagonalisable et les valeurs propres sont 0 *et/ou* 1.

On en déduit facilement que f est un projecteur non nul et différent de l'identité

$\Leftrightarrow f$ est diagonalisable et les valeurs propres sont 0 *et* 1.

Compte tenu de ce qu'on vient de faire cela équivaut à $(a, b, c) = (1/3, 1/3, 1/3)$,

ou, $(a, b, c) = (2/3, -1/3, -1/3)$.