

Préliminaire

Soit $X \in E_\lambda(f)$ Comme f et g commutent, $f - \lambda Id_E$ et g aussi (ainsi que tout "polynôme en f ", donc $(f - \lambda Id_E)[g(X)] = g[(f - \lambda Id_E)(X)] = g(0_E) = 0_E$ par linéarité de g . Donc $g(X) \in E_\lambda(f)$.

Partie 1

On peut répondre aux trois questions à la fois en réduisant f d'abord (on aurait pu commencer par g):

$$\text{Le polynôme caractéristique de } f \text{ est } \begin{vmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & -a & -1 \\ 0 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = (1-a)[a^2 - 2a + 1]$$

Donc $\text{Sp}(f) = \{1_{(3)}\}$ donc, f n'étant pas l'identité, on est sûr qu'elle n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Un vecteur } X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{y + z = 0\}$$

On a donc un plan vectoriel propre. On va chercher le plus gros sous-espace du type $\text{Ker}(f - Id_E)^k$, qui sera, naturellement stable par f et par g .

Un vecteur

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - Id_E)^2 \Leftrightarrow (f - Id_E)(X) \in \text{Ker}(f - Id_E) \Leftrightarrow \{0x + 0y + 0z = 0\}$$

On obtient donc tout l'espace. N'allons pas chercher plus loin.

On choisit U_1 tel que $\text{Vect}(U) \oplus \text{Ker}(f - Id_E) = \text{Ker}(f - Id_E)^2 = E$

$$U_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ convient. Notons } U_2 = (f - Id_E)(U_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Ce vecteur est propre}$$

pour f . Complétons avec U_3 dans $\text{Ker}(f - Id_E)$, formant une famille libre avec

$$U_2, U_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ convient. On observe que } (U_1, U_2, U_3) \text{ forment une base } B'$$

$$(\text{déterminant}_{B_0} \text{ très simple non nul}) \text{ et que } M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons les images par g de ces vecteurs:

$$g(U_1) =_{B_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, g(U_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U_2 \text{ et } g(U_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = U_2$$

Comme prévu, $\text{Vect}(U_2, U_3) = \text{Ker}(f - Id_E)$ est stable par g

D'autre part, $g(U_1) = 2U_1 + U_2 + U_3$ donc $M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a manifestement $g(U_2 - 2U_3) = 0$. On note donc $U'_3 = U_2 - 2U_3$

Alors $B'' = (U_1, U_2, U'_3)$ est aussi une base de E, U'_3 est propre pour f et g et

$$g(U_1) = 2U_1 + U_2 + \frac{1}{2}(U_2 - U'_3) \text{ donc } M_{B''}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M_{B''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{Vérifions que } f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ coïncident sur B''}.$$

$$(f \circ g)(U_1) = f\left(2U_1 + \frac{3}{2}U_2 - \frac{1}{2}U_3\right) = 2U_1 + \frac{7}{2}U_2 - \frac{1}{2}U_3$$

$$(g \circ f)(U_1) = g(U_1 + U_2) = 2U_1 + \frac{7}{2}U_2 - \frac{1}{2}U_3$$

$$(f \circ g)(U_2) = f(2U_2) = 2U_2 \text{ et } (g \circ f)(U_2) = g(U_2) = 2U_2$$

$$(f \circ g)(U_3) = f(0) = 0 \text{ et } (g \circ f)(U_3) = g(U_3) = 0$$

Donc f et g commutent et nous les avons réduites "simultanément" à la forme triangulaire.

Partie 2

1/ Nous savons que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. Ici, nous pouvons fabriquer n vecteurs propres de ce type, et donc, étant en dimension n, nous aurons une base de vecteurs propres de f.

2/

a/ f commute avec ses puissances f^k donc avec toute combinaison linéaire $u = P(f)$

b/ Pour un vecteur propre e_i associé à la valeur propre λ_i , et k entier, nous avons $f^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ donc, clairement, $P(f)(e_i) = P(\lambda_i)e_i$. Donc une base de diagonalisation de f en est aussi une pour tous les $P(f)$.

3/

a/ on vérifie facilement (sur les éléments de la base) que $u^5 = Id_E$ si $A = M_{B_0}(u)$

Donc, si a est une valeur propre de u, nécessairement $a^5 - 1 = 0$

On a donc $Sp(u) \subset \{e^{ik\frac{2\pi}{5}}, k \in [0, 4]\}$.

D'autre par, soit $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ et soit le vecteur $V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \omega_k^3 \\ \omega_k^4 \end{pmatrix}$

Alors $AV_k = \begin{pmatrix} \omega_k^4 \\ 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \omega_k^3 \end{pmatrix} = \omega_k^4 V_k$ (car $\omega_k^5 = 1$). Donc, V_k étant non nul, $\omega_k^4 = \frac{1}{\omega_k}$ est dans

le spectre, ce qui nous donne 5 valeurs propres distinctes, en faisant varier k dans $[0, 4]$, qui décrivent complètement $\{e^{ik\frac{2\pi}{5}}, k \in [0, 4]\}$.

b/ Clairement $B = 5I_5 + A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4$

c/ Donc les valeurs propres de B sont:

$5 + \omega_k + 2\omega_k^2 + 3\omega_k^3 + 4\omega_k^4$ avec $k \in [0, 4]$.

NB: dans $\mathbb{R}$, nous avons $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$ pour $x \neq 1$

En dérivant, nous avons: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{(1-x)(-5x^4) - (-1)(1-x^5)}{(1-x)^2}$

La relation formelle entre polynômes $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)(1-x)^2 = 1 - 5x^4 + 4x^5$ reste valable pour tout complexe z , donc,

pour $k \neq 0$, $\omega_k + 2\omega_k^2 + 3\omega_k^3 + 4\omega_k^4 = \omega_k \left(\frac{1-5\omega_k^4+4\omega_k^5}{(1-\omega_k)^2} \right) = \frac{5(\omega_k-1)}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{5}{1-\omega_k}$

Donc les valeurs propres de B sont:

$\frac{5\omega_k}{\omega_k-1} = \frac{5e^{ik\frac{2\pi}{5}}}{e^{ik\frac{2\pi}{5}}-1} = \frac{5e^{ik\frac{2\pi}{5}}}{e^{ik\frac{\pi}{5}}(2i\sin(k\frac{\pi}{5}))} = -\frac{5ie^{ik\frac{\pi}{5}}}{(2i\sin(k\frac{\pi}{5}))} = -\frac{5}{2}(-1 + i\cotan(k\frac{\pi}{5}))$ pour $k \in [1, 4]$ et

15.

4/

a/ Nous savons que, pour tout i , $1 \leq \dim(E_{\lambda_i}) \leq \text{ordre}(\lambda_i) = 1$ donc tous les sev propres sont de dimension 1.

b/ Comme ils sont stables par g cela signifie que, comme $E_{\lambda_i} = \text{Vect}(e_i)$,

on a $g(e_i) \in E_{\lambda_i}$ donc $\exists \mu_i \in \mathbb{R} : g(e_i) = \mu_i e_i$

c/ La base $(e_1, \dots, e_n)$ est clairement une base de diagonalisation de g .

d/

(i) comme l'application $u_i : P \rightarrow P(\lambda_i)$ est linéaire, φ est linéaire.

(ii) P de $\text{Ker}(\varphi)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et possède n racines distinctes, donc c'est le polynôme nul.

(iii) Comme $\dim(\mathbb{C}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathbb{C}^n)$ l'application φ est bijective, d'où le résultat.

NB: on est en plein dans la théorie des polynômes d'interpolation de Lagrange...

e/ On peut donc trouver un unique polynôme P tel que:

$(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Considérons alors $u = P(f)$.

u est diagonalisable dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et la matrice correspondante coïncide avec celle de g dans la même base, donc $g = u = P(f)$.

NB: nous venons de montrer que le commutant de f possédant n valeurs propres deux à deux distinctes coïncidait avec $\mathcal{C}[f] = \{P(f), P \in \mathbb{C}[X]\}$.

En fait, nous pouvons réduire à $\{P(f), P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton qui permet d'écrire tout polynôme en f avec un polynôme de degré strictement inférieur à n).

5/

a/ Nous savons que cette matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Le polynôme caractéristique de M est: $X^2 - 5X + 4$ donc $\text{Sp}(f) = \{4_{(1)}, 1_{(1)}\}$

$$X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_4 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0 \\ -\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a + b = 0 \text{ donc } U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

convient. Nous savons alors que $E_1 = \text{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

convient.

b/On vérifie facilement que N et M commutent, donc nous sommes dans le cadre précédent et donc qu'elles sont simultanément diagonalisables, d'où le résultat avec

$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \text{ donc } Q^{-1}N^2Q = \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $(u, v) \in \{(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)\}$

S'il existe deux réels α et β tels que $N = \alpha I_2 + \beta M$ alors $Q^{-1}NQ = \alpha I_2 + \beta Q^{-1}MQ$

$$\text{D'où } \begin{cases} \alpha + 4\beta = 2\varepsilon_1 \\ \alpha + \beta = \varepsilon_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \varepsilon_2 \\ 3\beta = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2}{3} \\ \beta = \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3} \end{cases}$$

Avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 1)$ on obtient $N = \frac{2}{3}I_2 + \frac{1}{3}M$

Avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, -1)$ on obtient $N = -2I_2 + M$

Avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, 1)$ on obtient $N = 2I_2 - M$

Avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, -1)$ on obtient $N = -\frac{2}{3}I_2 - \frac{1}{3}M$.

Partie 3

1/

a/on a clairement $r(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)a \wedge u$

b/ On a $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(a) + a^\perp$ d'où le résultat.

c/ si $v = u + \lambda a$ on a $r(v) = r(u) + \lambda a = (\cos\theta)(v - \lambda a) + (\sin\theta)a \wedge v + \lambda a$

et nous savons que $\lambda = a \cdot v$ donc:

$$r(v) = (1 - \cos\theta)(a \cdot v)a + (\cos\theta)v + (\sin\theta)a \wedge v.$$

2/

a/ nous savons que $f \circ g$, composée de deux isométries indirectes, est une isométrie directe, donc une rotation. La droite intersection des deux plans est invariante par f et g, donc c'est l'axe de la rotation. L'angle de la rotation est le double de l'angle des deux plans (résultat classique de géométrie).

Une réflexion s par rapport au plan P de vecteur unitaire normal p s'exprime par:

$$s(v) = v - 2(v \cdot p)p \text{ donc, si } p = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ alors}$$

$$s(v) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2(ax + by + cz) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } f, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } M_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } g, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } M_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } M_{B_0}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Un vecteur directeur de l'axe est } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ que l'on norme p}$$

et nous connaissons l'angle des deux plans par l'angle des deux vecteurs normaux:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{ donc l'angle de la rotation est } \frac{2\pi}{3} \text{ ou son opposé.}$$

Nous savons que $\text{signe}(\sin\theta) = \det_{BOND}(X, (f \circ g)(X), p)$ où X n'est pas colinéaire à l'axe. On choisit $X=e_1$ et le déterminant en question est:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ donc la rotation est d'axe p, d'angle } -\frac{2\pi}{3}$$

la rotation $g \circ f$ est de même axe mais d'angle opposé, les endomorphismes ne commutent pas.

3/

On vérifie les normes de deux premiers vecteurs colonnes et leur produit scalaire. Comme leur produit vectoriel donne le troisième, nous avons bien une isométrie directe, donc une rotation d'angle a et d'axe U .

La trace de la matrice vaut $\frac{11}{5} = 1 + 2\cos a$ donc $\cos(a) = \frac{3}{5}$

$$\text{L'axe est un vecteur fixe de l'endomorphisme: clairement } U=e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{de plus } \text{signe}(\sin a) = \text{signe} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} < 0 \text{ donc } a = -\arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

4/

a/ φ est combinaison linéaire de Id_E et de $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$u \rightarrow f(u) = (u \cdot a)a$$

Par linéarité à gauche du produit scalaire, f est linéaire.

Donc φ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot_{\mathbb{R}})$

b/ notons $P=a^\perp$. Alors $\varphi|_P = Id_P$

D'autre part, $\varphi(a) = (1 + \lambda \|a\|^2)a$.

Si on veut que φ soit une isométrie, il est nécessaire que $\|\varphi(a)\| = \|a\|$ et donc que $1 + \lambda \|a\|^2 \in \{-1, 1\}$.

$$\text{Donc } \lambda \in \left\{0, -\frac{2}{\|a\|^2}\right\}$$

Pour $\lambda = 0$, on a $\varphi = Id_E$

Pour $\lambda = -\frac{2}{\|a\|^2}$ alors $\varphi(a) = -a$ et comme $\varphi|_P = Id_P$, alors φ est la symétrie orthogonale par rapport au plan P , qui est naturellement une isométrie.