

Olivier HALGAND
olivier.halgand@ac-lyon.fr

I Noyau de Dirichlet

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{ikt} + \sum_{k=1}^n e^{-ikt} \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} (e^{ikt} + e^{-ikt}) dt,$$

et donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos(kt) dt = 2\pi + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi},$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Alors, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique on a :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n (e^{it})^k = e^{-int} \frac{1 - (e^{it})^{2n+1}}{1 - e^{it}}.$$

En utilisant « l'angle moitié », on obtient :

$$D_n(t) = e^{-int} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} (e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t})}{e^{i\frac{t}{2}} (e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})} = \frac{-2i \sin((n+\frac{1}{2})t)}{-2i \sin \frac{t}{2}},$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Puisque les fonctions h et $u \mapsto \sin(\alpha u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$, on peut effectuer une intégration par parties, ce qui donne :

$$I_\alpha = \left[h(u) \frac{-\cos(\alpha u)}{\alpha} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} h'(u) \frac{-\cos(\alpha u)}{\alpha} du = \frac{\cos(\alpha\pi)}{\alpha} (h(-\pi) - h(\pi)) + \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} h'(u) \cos(\alpha u) du.$$

Or, on a d'une part :

$$\left| \frac{\cos(\alpha\pi)}{\alpha} (h(-\pi) - h(\pi)) \right| \leq \frac{|h(-\pi) - h(\pi)|}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0,$$

et, d'autre part, h' étant continue sur $[-\pi, \pi]$: $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall u \in [-\pi, \pi], |h'(u)| \leq M$. On a donc :

$$\left| \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} h'(u) \cos(\alpha u) du \right| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |h'(u)| du \leq \frac{2M\pi}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0,$$

et donc :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I_\alpha = 0.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx \right) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-x)} dx.$$

Effectuons le changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) : $u = t - x$, ce qui donne :

$$\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} g(t-u) \sum_{k=-n}^n e^{iku} (-du) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} g(t-u) D_n(u) du.$$

Or, les fonctions g et D_n sont 2π -périodiques, donc (pour tout $t \in \mathbb{R}$) il en est de même de la fonction $u \mapsto g(t-u) D_n(u)$, ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u) D_n(u) du.$$

5. Puisque, d'après 1., $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} - g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u) D_n(u) du - \frac{1}{2\pi} g(t) \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(t-u) - g(t)) D_n(u) du. \end{aligned}$$

Posons alors, pour $u \neq 0$: $h_t(u) = \frac{g(t-u) - g(t)}{\sin \frac{u}{2}}$, et $h_t(0) = -2g'(t)$. Puisque :

$$\frac{g(t-u) - g(t)}{\sin \frac{u}{2}} = \frac{g(t-u) - g(t)}{-u} \cdot \frac{-u}{\sin \frac{u}{2}} \xrightarrow{u \rightarrow 0} g'(t) \cdot (-2) = -2g'(t),$$

alors h_t est continue en 0, et donc sur $[-\pi, \pi]$. De plus :

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad \sin \frac{u}{2} \cdot D_n(u) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) u \right).$$

On en déduit que

$$\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) u \right) du, \text{ où } h_t \text{ est continue sur } [-\pi, \pi].$$

6. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Puisque les fonctions g et $x \mapsto e^{-inx}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\pi, \pi]$, on peut effectuer une double intégration par parties, ce qui donne, puisque g , et donc g' , sont 2π -périodiques :

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[g(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(x) \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right) \\ &= \frac{i}{2\pi n} \left((-1)^n (g(\pi) - g(-\pi)) - \int_{-\pi}^{\pi} g'(x) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{-i}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} g'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{-i}{2\pi n} \left(\left[g'(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g''(x) \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi n^2} \left((-1)^n (g'(\pi) - g'(-\pi)) - \int_{-\pi}^{\pi} g''(x) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{-1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} g''(x) e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |c_n(g)| = \frac{1}{2\pi n^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g''(x) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |g''(x)| dx,$$

et comme g'' est continue sur $[-\pi, \pi]$: $\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [-\pi, \pi], |g''(x)| \leq A$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |c_n(g)| \leq \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} A dx = \frac{A}{n^2}.$$

On en déduit donc que :

lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $c_n(g) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $c_{-n}(g) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

7. Puisque la fonction h_t de la question **5.** est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, d'après **3.** on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) du = 0,$$

c'est-à-dire, d'après **5.** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} - g(t) \right) = 0,$$

ou encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k(g) e^{ikt} + \sum_{k=1}^n c_{-k}(g) e^{-ikt} \right) = g(t).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=0}^n c_k(g) e^{ikt} \right| \leq \sum_{k=0}^n |c_k(g)| \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=1}^n c_{-k}(g) e^{-ikt} \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_{-k}(g)|,$$

et d'après **6.**, $c_k(g) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $c_{-k}(g) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, ce qui implique que les séries $\sum c_n(g)$ et $\sum c_{-n}(g)$ sont absolument convergentes, donc convergentes. Il s'ensuit que les séries $\sum c_n(g) e^{int}$ et $\sum c_{-n}(g) e^{-int}$ convergent, et on peut donc écrire l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g) e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g) e^{-int}.$$

II Coordonnées polaires

8. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\varphi : (r, t) \in]-\delta, \delta[\times \mathbb{R} \mapsto (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}$, donc, par composition,

$g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$

On a donc (en notant φ_1 et φ_2 les applications partielles de φ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(r, t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r, t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, t)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(r, t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, t)) \\ &= -r \sin t \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, t)) + r \cos t \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, t)), \end{aligned}$$

et de même :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, t) = \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, t)) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, t)).$$

On en tire, d'après le théorème de Schwarz, en omettant les $\varphi(r, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) &= -r \cos t \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin t \left(-r \sin t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - r \sin t \frac{\partial f}{\partial y} + r \cos t \left(-r \sin t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= -r \cos t \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin t \frac{\partial f}{\partial y} + r^2 \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2 \sin t \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) &= \cos t \left(\cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + \sin t \left(\cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= \cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \sin t \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= r \left(\cos t \frac{\partial f}{\partial x} + \sin t \frac{\partial f}{\partial y} \right) + r^2 \left(\cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \sin t \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - r \left(\cos t \frac{\partial f}{\partial x} + \sin t \frac{\partial f}{\partial y} \right) + r^2 \left(\sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \sin t \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\ &= r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Or, puisque f est harmonique par hypothèse, on a $\Delta f = 0$, et donc :

$$\boxed{r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

9. Puisque g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -\delta, \delta[\times \mathbb{R}$, on en déduit que J est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -\delta, \delta[$, donc en particulier :

$$\boxed{J \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, \delta].}$$

De plus, pour tout $r \in [0, \delta[$, on a :

$$J'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) dt \quad \text{et} \quad J''(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) dt.$$

On en déduit que, pour tout $r \in]0, \delta[$:

$$\begin{aligned}rJ''(r) + J'(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(r \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial g}{\partial r} \right)(r, t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) dt = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial g}{\partial t}(r, t) \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} \\ &= -\frac{1}{r} \left[-r \sin t \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + r \cos t, y_0 - r \sin t) + r \cos t \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - r \cos t, y_0 - r \sin t) \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} \\ &= -\frac{1}{r} \left(-r \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - r, y_0) + r \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - r, y_0) \right) = 0.\end{aligned}$$

Par continuité de J' et J'' , l'égalité est encore vraie pour $r = 0$ et donc :

$$\boxed{\forall r \in [0, \delta[, \quad rJ''(r) + J'(r) = 0.}$$

10. Ainsi, la fonction J est solution, sur $]0, \delta[$, de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{r}y = 0$. On en déduit donc tout d'abord que :

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall r \in]0, \delta[, \quad J'(r) = K e^{-\ln r} = \frac{K}{r},$$

et ensuite :

$$\exists (K, K') \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, \delta[, \quad J(r) = K \ln r + K'.$$

Or, on sait que J est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \delta[$, donc $K = 0$ et donc

$$\boxed{J \text{ est constante sur } [0, \delta[.}$$

III Problème de Dirichlet

11. Supposons qu'il existe une boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans U sur laquelle f ne soit pas constante. Alors, il existe $r \in]0, \delta[$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que : $f(x_0, y_0) > f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$. Donc, par stricte croissance de l'intégrale (les fonctions considérées étant continues) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0, y_0) dt > \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt, \quad \text{soit : } J(0) > J(r),$$

ce qui contredit le fait que J est constante sur $]0, \delta[$ (d'après **II.10.**). Donc :

la fonction f est constante sur toute boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans U .

12. Puisque f est continue sur le compact K , elle est bornée et atteint ses bornes. Considérons alors $M = \max_{x \in K} f(x)$ et $m = \min_{x \in K} f(x)$. Si $m = M$, alors f est constante sur K et donc nulle.

Supposons donc $m \neq M$ et, quitte à considérer $-f$, on peut supposer $M > 0$. Alors, f admet un maximum global en un point $m_0 \in \overset{\circ}{K}$. D'après **III.11.**, cela implique que f est constante sur toute boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans $\overset{\circ}{K}$. En particulier, si δ est la distance de m_0 à $Fr(K)$, f est constante sur la boule $\mathcal{B}$ de centre m_0 et de rayon δ . Mais alors, par continuité de f sur K , on en déduit que f est nulle sur $\mathcal{B}$, ce qui contredit le choix de M .

On peut donc en conclure que

la fonction f est nulle sur K .

13. On cherche une fonction f_0 telle qu'il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in K, f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$.

- D'après la condition **2**, f_0 est harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, et donc :

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = 0 \quad \text{soit : } \forall (x, y) \in \overset{\circ}{K}, \varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0.$$

- D'après la condition **3**,

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad f_0(x, 0) = \sin x \quad \text{donc : } \varphi(x)\psi(0) = \sin x.$$

- D'après la condition **4**,

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad f_0(x, 2\pi) = 0 \quad \text{donc : } \varphi(x)\psi(2\pi) = 0.$$

- D'après la condition **5**,

$$\forall y \in [0, 2\pi], \quad f_0(0, y) = f_0(2\pi, y) = 0 \quad \text{donc : } \varphi(0)\psi(y) = \varphi(2\pi)\psi(y) = 0.$$

La condition **3** suggère de poser : $\forall x \in [0, 2\pi], \varphi(x) = \sin x$, de sorte que la condition **5** est vérifiée, et on doit alors avoir : $\psi(0) = 1$ et $\psi(2\pi) = 0$. La condition **2** s'écrit donc :

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{K}, \quad -\sin x \psi(y) + \sin x \psi''(y) = 0,$$

et donc :

$$\forall y \in]0, 2\pi[, \quad \psi''(y) - \psi(y) = 0.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes a et b telles que : $\forall i \in [0, 2\pi], \psi(y) = a e^y + b e^{-y}$. Puisque $\psi(0) = 1$ et $\psi(2\pi) = 0$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ e^{2\pi}a + e^{-2\pi}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e^{2\pi} - e^{-2\pi})a = -e^{-2\pi} \\ (e^{2\pi} + e^{-2\pi})b = e^{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-e^{-2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = \frac{-e^{-2\pi}}{2 \operatorname{sh}(2\pi)} \\ b = \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = \frac{e^{2\pi}}{2 \operatorname{sh}(2\pi)} \end{cases}.$$

On doit donc avoir :

$$\forall y \in [0, 2\pi], \quad \psi(y) = \frac{1}{2 \operatorname{sh}(2\pi)} \left(-e^{-2\pi} e^y + e^{2\pi} e^{-y} \right) = \frac{1}{2 \operatorname{sh}(2\pi)} \left(-e^{-(2\pi-y)} + e^{2\pi-y} \right) = \frac{\operatorname{sh}(2\pi-y)}{\operatorname{sh}(2\pi)}.$$

On en déduit donc, en utilisant la condition 1 :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}, \quad f_0(x, y) = \varphi(x)\psi(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}(2\pi)} \sin x \operatorname{sh}(2\pi - y).$$

Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant aux cinq conditions. Alors, la fonction $f - f_0 : K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur K , harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, et nulle sur la frontière $Fr(K)$. Donc, d'après **III.12.**, $f - f_0$ est nulle sur K , c'est-à-dire $f = f_0$. Donc :

la fonction f_0 est l'unique solution du problème posé.

IV Développement en série

14. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, il en est de même de v_n . Pour tout $r \in [0, R[$ et avec $g : (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$, on a donc :

$$v'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) e^{-int} dt \quad \text{et} \quad v''_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, t) e^{-int} dt.$$

Donc, d'après **II.8.** :

$$\begin{aligned} r^2 v''_n(r) + r v'_n(r) - n^2 v_n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} \right) (r, t) e^{-int} dt - \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) e^{-int} dt - \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, t) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

Or, avec deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} n^2 \int_{-\pi}^{\pi} g(r, t) e^{-int} dt &= \left[-\frac{n}{i} e^{-int} g(r, t) \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{n}{i} e^{-int} \frac{\partial g}{\partial t}(r, t) dt \\ &= ni(-1)^n \underbrace{\left(g(r, \pi) - g(r, -\pi) \right)}_{=0} - i \left(\left[\frac{e^{-int}}{-i} \frac{\partial g}{\partial t}(r, t) \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{-i} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) dt \right) \\ &= (-1)^n \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial t}(r, \pi) - \frac{\partial g}{\partial t}(r, -\pi) \right)}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) e^{-int} dt \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

la fonction v_n est solution de l'équation différentielle : $r^2 v''_n(r) + r v'_n(r) - n^2 v_n(r) = 0$.

15. On résout l'équation sur $]0, R[$ en posant le changement de variable : $r = e^s$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial s}(e^s) &= e^s \frac{\partial v_n}{\partial r}(r) = r \frac{\partial v_n}{\partial r}(r), \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial s^2}(e^s) &= e^s \frac{\partial v_n}{\partial r}(r) + e^{2s} \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}(r) = r \frac{\partial v_n}{\partial r}(r) + r^2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}(r). \end{aligned}$$

L'équation différentielle devient donc :

$$v_n''(e^s) - n^2 v_n(e^s) = 0.$$

Ainsi, la fonction $v_n \circ \exp$ est solution de l'équation différentielle : $y'' - n^2 y = 0$ dont les solutions sont les fonctions : $y : s \mapsto \alpha_n e^{ns} + \beta_n e^{-ns} = \alpha_n (e^s)^n + \beta_n (e^s)^{-n}$ avec $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit donc :

les solutions de l'équation différentielle (E_n) sont les fonctions

$$v_n : r \mapsto \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}, \text{ avec } (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2.$$

16. On effectue une disjonction de cas :

- si $n = 0$, alors v_0 est constante, donc : $\exists a_n \in \mathbb{R}, \forall r \in [0, R[, v_0(r) = a_0$;
- si $n > 0$, alors puisque v_n est continue sur $[0, R[$, on a nécessairement $\beta_n = 0$ et donc : $\exists a_n \in \mathbb{R}, \forall r \in]0, R[, v_n(r) = a_n r^n$;
- si $n < 0$, alors puisque v_n est continue sur $[0, R[$, on a nécessairement $\alpha_n = 0$ et donc : $\exists a_n \in \mathbb{R}, \forall r \in [0, R[, v_n(r) = a_n r^{-n}$.

Dans tous les cas :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}, \forall r \in]0, R[, v_n(r) = a_n r^{|n|}.$$

17. Soient $r \in [0, R[, t \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $g_r : t \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$. Alors g_r est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique et, avec les notations de la partie **I** :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos t, r \sin t) e^{-int} dt = v_n(r) = a_n r^{|n|}.$$

Donc, d'après **I.7.** :

$$g_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g) e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g) e^{-int},$$

soit :

$$f(r \cos t, r \sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} r^n e^{-int},$$

ou encore :

$$f(r \cos t, r \sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r e^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (r e^{-it})^n.$$

18. Soit f une fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^2$. D'après la partie **IV.**, il existe des coefficients complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, f(r \cos t, r \sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r e^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (r e^{-it})^n.$$

Or, puisque f est bornée sur $\mathbb{R}^2$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, |f(r \cos t, r \sin t)| \leq M,$$

ce qui implique que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = a_{-n} = 0$ et donc que f est constante.

toute fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^2$ est constante.

V Théorème de D'Alembert-Gauss

19. D'après les hypothèses, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P'(x + iy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i P'(x + iy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = P''(x + iy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -P''(x + iy).$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

c'est-à-dire que :

$$f \text{ est harmonique sur } \mathbb{R}^2.$$

20. Puisque f ne s'annule pas sur U , on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et, pour tout $(x, y) \in U$, on a d'une part :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f^2(x, y)} \quad \text{donc :} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot f^2(x, y) - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 \cdot f(x, y)}{f^4(x, y)},$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f^2(x, y)} \quad \text{donc :} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot f^2(x, y) - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 \cdot f(x, y)}{f^4(x, y)}.$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(x, y) = -\frac{1}{f^2(x, y)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(x, y) - \frac{2}{f^3(x, y)} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)(x, y),$$

avec :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{car } f \text{ est harmonique,}$$

et :

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)(x, y) = \left(P(x + iy) \right)^2 + \left(i P'(x + iy) \right)^2 = 0.$$

Finalement,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0,$$

et donc :

$$g \text{ est harmonique sur } U.$$

21. Écrivons : $P = \sum_{n=0}^d \lambda_n X^n$ où d est le degré de P . Puisque P n'est pas constant, on a : $d \geq 1$.

On en déduit que : $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$, c'est-à-dire :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq A \Rightarrow |P(z)| \geq 1.$$

22. Le théorème de D'Alembert-Gauss s'énonce ainsi :

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Considérons donc un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, et supposons qu'il ne possède pas de racine dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq A \Rightarrow |P(z)| \geq 1.$$

On note $\mathcal{B}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon A .

Par hypothèse, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x, y) = P(x + iy)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ et, d'après **V.19.**, est harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Considérons alors la fonction $g = \frac{1}{f}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors, d'après **V.20.**, g est aussi harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Mais, d'une part, g est bornée sur le compact $\mathcal{B}$ et, d'autre part :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \geq A \Rightarrow |g(x, y)| = \left| \frac{1}{f(x, y)} \right| \leq 1,$$

c'est-à-dire que g est bornée par 1 sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$. Finalement, g est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Mais alors, d'après **IV.18.**, g est constante, donc f et P aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il s'ensuit que P possède au moins une racine complexe, et le théorème de D'Alembert-Gauss est démontré!