

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2020

Épreuve de mathématiques II, PSI, quatre heures

Corrigé

I – Fonctions de Lambert

Q 1. L'application f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , en tant que produit d'une application polynomiale et de l'exponentielle. On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x. \quad (1)$$

Ainsi, pour tout $x > -1$, on a $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$; comme de plus elle est continue, on en déduit qu'elle définit une bijection de $] -1, +\infty[$ dans $\left[f(-1), \lim_{+\infty} f \right]$, d'après le théorème de la bijection monotone. Or on a $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc f réalise une bijection de $] -1, +\infty[$ dans $I = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right[$.

Q 2. L'application W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ en tant que bijection réciproque de la restriction à $] -1, +\infty[$ de l'application f (dont l'ensemble image est $[-e^{-1}, +\infty[$, on l'a vu). Pour justifier qu'elle soit de classe C^∞ sur $] -e^{-1}, +\infty[$, il suffit de constater que non seulement f est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$, mais qu'en plus on a : $\forall x > -1, f'(x) \neq 0$: chose qui est immédiate d'après le calcul de dérivée effectué en (1). Ainsi W est bien de classe C^∞ sur $] -e^{-1}, +\infty[$.

Q 3. On sait que $W(0)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = 0$ d'inconnue $t \in] -1, +\infty[$. Or $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$, donc $W(0) = 0$.

Pour calculer la dérivée de W , on rappelle qu'en tant que bijection réciproque de f , on a :

$$\forall x > -e^{-1}, \quad W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}.$$

En particulier :

$$W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = \frac{1}{f'(0)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Q 4. D'après le théorème de Taylor-Young, on a pour tout x au voisinage de 0 :

$$W(x) = W(0) + W'(0)x + o_{x \rightarrow 0}(x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Pour un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, notons que par définition d'une application réciproque on a :

$$\forall x \geq -e^{-1}, \quad f(W(x)) = x \iff \forall x \geq -e^{-1}, \quad W(x)e^{W(x)} = x,$$

et donc : $\forall x \geq -e^{-1}, W(x) = xe^{-W(x)}$. Cette égalité prouve à la fois que W est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* (on pouvait aussi le déduire du fait que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$), et qu'on a : $\forall x \geq -e^{-1}, \ln(W(x)) = \ln(x) - W(x)$, donc :

$$\forall x > 0, \quad W(x) = \ln(x) - \ln(W(x)). \quad (2)$$

Encadrons $W(x)$ pour tout x assez grand, pour démontrer que $\ln(W(x))$ est négligeable devant $\ln(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$: tout d'abord, on a $W(x) \geq 1$ pour tout x assez grand,

étant donné que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (plus précisément, c'est vrai pour $x \geq e$). Cela donne $\ln(W(x)) \geq 0$, et donc combiné à (2) on a : $W(x) \leq \ln(x)$. Ainsi, pour tout x assez grand :

$$1 \leq W(x) \leq \ln(x), \text{ c'est-à-dire : } 0 \leq \ln(W(x)) \leq \ln(\ln(x)).$$

Donc, pour tout x au voisinage de $+\infty$, toujours en utilisant (2) :

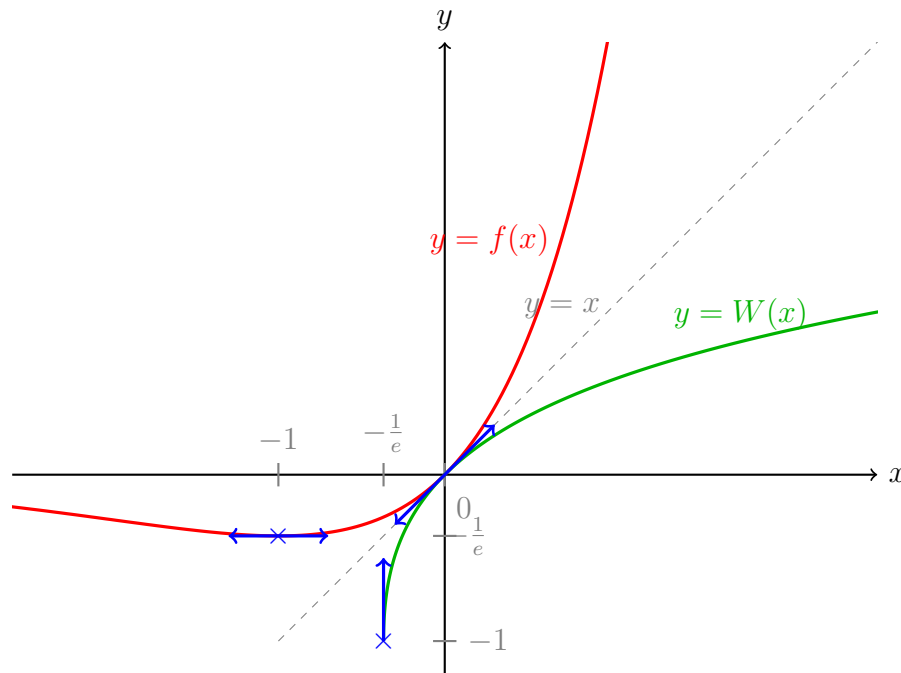
$$W(x) = \ln(x) + \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(\ln(\ln(x))) = \ln(x) + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(\ln(x)),$$

c'est-à-dire :

$$W(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$$

Q 5. Nous savons que le graphe de f et celui de W sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Tracer l'un suffit donc à en déduire l'autre. Nous avons déjà assuré que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$; de plus, notons que $f'(-1) = 0$, ce qui permet de préciser l'allure de \mathcal{C}_f au voisinage de -1 (tangente horizontale), et par symétrie on a l'allure de \mathcal{C}_W au voisinage de $-e^{-1}$ (tangente verticale).

Nous connaissons également $W'(0) = 1$, ce qui nous permet de tracer la tangente en 0 à la courbe de W . Tout ceci étant considéré, voici les graphes demandés :



Nous aurions aussi pu utiliser le tracé du logarithme pour en déduire, asymptotiquement, celui de W (étant donné que $W(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$), mais attention à ne pas abuser de ce que permet de conjecturer cet équivalent : on peut en effet démontrer facilement, partant des calculs de la question précédente, que :

$$W(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(1),$$

et en particulier $W(x) - \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$: leurs graphes respectifs s'écartent.

Q 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, d'après la question **Q 4**, on a : $x^\alpha W(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{\alpha+1} > 0$, et la fonction de Riemann $x \mapsto x^{\alpha+1} = \frac{1}{x^{-\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $-\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > -2$. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si : $\alpha > -2$.

Q 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $[1, +\infty[$, et on a d'après la question **Q 4** : $x^\alpha W(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\alpha \ln(x) > 0$. On en déduit que l'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si l'application $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ l'est. Pour étudier son intégrabilité, nous allons la comparer à des fonctions de Riemann.

Si $\alpha \geq -1$ alors l'inégalité $x^\alpha \ln(x) \geq x^\alpha$, valable pour tout x assez grand (par exemple $x \geq e$), montre que la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, parce que la fonction $x \mapsto x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ si $-\alpha \leq 1$ (c'est-à-dire $\alpha \geq -1$, ce qu'on a supposé).

Si $\alpha < -1$, alors en prenant $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > 1$ et $s < -\alpha$ (par exemple : $s = \frac{1-\alpha}{2}$), nous avons pour tout x au voisinage de $+\infty$.

$$x^s x^\alpha \ln(x) = x^{s+\alpha} \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

d'après le théorème des croissances comparées (car $s + \alpha < 0$ par hypothèse sur s). Donc : $x^\alpha \ln(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^s} \right)$. Et comme $s > 1$, la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ l'est également.

En conclusion : $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$. D'après ce qui précède, on en déduit que l'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$: d'où le résultat.

Q 8. On reprend le calcul de la question **Q 1**, sauf qu'on note cette fois-ci que $f'(x) < 0$ pour tout $x < 1$, et donc que f est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$, et le théorème de la bijection monotone implique que f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ dans $[f(-1), \lim_{-\infty} f[=]-\frac{1}{e}, 0[$ (la limite est nulle en $-\infty$ d'après le théorème des croissances comparées). D'où le résultat.

Q 9. On rappelle que par définition d'une bijection :

- $W(x)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = x$ d'inconnue t DANS $[-1, +\infty[$, et pour x DANS $[-e^{-1}, +\infty[$;
- $V(x)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = x$ d'inconnue t DANS $]-\infty, -1]$, et pour x DANS $[-e^{-1}, 0[$;

Il n'y a ambiguïté sur les solutions à l'équation $f(t) = x$ que si x est dans l'intervalle de définition commun à V et W , c'est-à-dire si :

$$x \in [-e^{-1}, +\infty[\cap]-\infty, -1] = [-e^{-1}, 0[.$$

Dans ce cas, $f(t) = x$ a deux solutions : $V(x) \in]-\infty, -1]$ et $W(x) \in [-1, +\infty[$. Il n'y en a pas d'autre, sinon cela contredirait l'injectivité de f soit sur $]-\infty, -1]$, soit sur $[-1, +\infty[$. Enfin, notons que $f(-1) = -e^{-1}$, et que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ puis strictement croissante sur $]-1, +\infty[$. Cette étude montre à la fois qu'il n'y a pas de solution à l'équation $f(t) = x$ si $x < -e^{-1}$ (puisque'il s'agit du minimum de la fonction), et que l'équation $f(t) = -e^{-1}$ n'a qu'une unique solution pour $t \in \mathbb{R}$, et on en déduit : $W(-e^{-1}) = V(-e^{-1}) = -1$.

On peut donc répondre à la question : si $m \in \mathbb{R}$, alors le nombre de solutions à l'équation $x e^x = m$ (qui équivaut à $f(x) = m$), d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est :

- zéro si $m \in]-\infty, -e^{-1}[$;
- une si $m = -e^{-1}$ ou si $m \geq 0$: dans ce cas l'unique solution est $W(m)$;
- deux si $m \in]-e^{-1}, 0[$: dans ce cas les solutions sont $W(m)$ et $V(m)$.

Q 10. On raisonne de façon similaire à la question précédente, mais cette fois en tenant compte du fait que f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ (de sorte que f renverse les inégalités si et seulement si son argument est inférieur à -1). En particulier, pour m dans l'intervalle $[-e^{-1}, 0[$ commun à V et W , on a $m = f(W(m))$ et $m = f(V(m))$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$xe^x \leq m \iff f(x) \leq f(W(m)) = f(V(m)) \iff \begin{cases} x \leq W(m) & \text{si } x \in [-1, +\infty[, \\ x \geq V(m) & \text{si } x \in] -\infty, -1], \end{cases}$$

Pour m dans les autres intervalles, l'étude n'a pas de complication particulière. Notons tout de même que $f(x) \leq 0$ pour tout $x \leq -1$, donc si $m \geq 0$ alors $f(x) \leq m$ pour tout $x < -1$: le cas $x < -1$ est alors trivial dans ce cas, et on peut se contenter de l'étude si $x \geq -1$, ce qui permet de résoudre l'inéquation en recourant à la fonction W .

On en déduit que si $m \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble des solutions à l'inéquation $xe^x \leq m$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est :

- vide si $m \in] -\infty, -e^{-1}[$;
- $] -\infty, -1] \cup [-1, W(m)] =] -\infty, W(m)]$ si $m \geq 0$;
- $([V(m), +\infty[\cap] -\infty, -1]) \cup (] -\infty, W(m)] \cap [-1, +\infty[) = [V(m), W(m)]$ si $m \in] -e^{-1}, 0[$.

Représentons graphiquement ces intervalles de solutions (sauf le premier, où l'illustration me paraît creuse) sur la figure **Q 10** (page 5). Je représente en vert l'intervalle sur lequel l'inéquation $xe^x \leq m$ est vérifiée, et en bleu la portion de graphe correspondante.

Q 11. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Notons que l'équation de l'énoncé équivaut à :

$$bxe^{-ax} = -1 \iff -axe^{-ax} = \frac{a}{b} \iff f(-ax) = \frac{a}{b}.$$

D'après l'étude que nous avons faite dans la question **Q 9**, on en déduit les solutions éventuelles suivantes :

- si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$, alors cette équation n'a pas de solution ;
- si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$ ou $\frac{a}{b} \geq 0$, alors une solution $x \in \mathbb{R}$ de cette équation vérifie $-ax = W\left(\frac{a}{b}\right)$, c'est-à-dire : $x = -\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)$;
- si $\frac{a}{b} \in] -e^{-1}, 0[$, alors un raisonnement analogue à celui ci-dessus montre que les solutions sont $-\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)$ et $-\frac{1}{a}V\left(\frac{a}{b}\right)$.

II – Probabilités

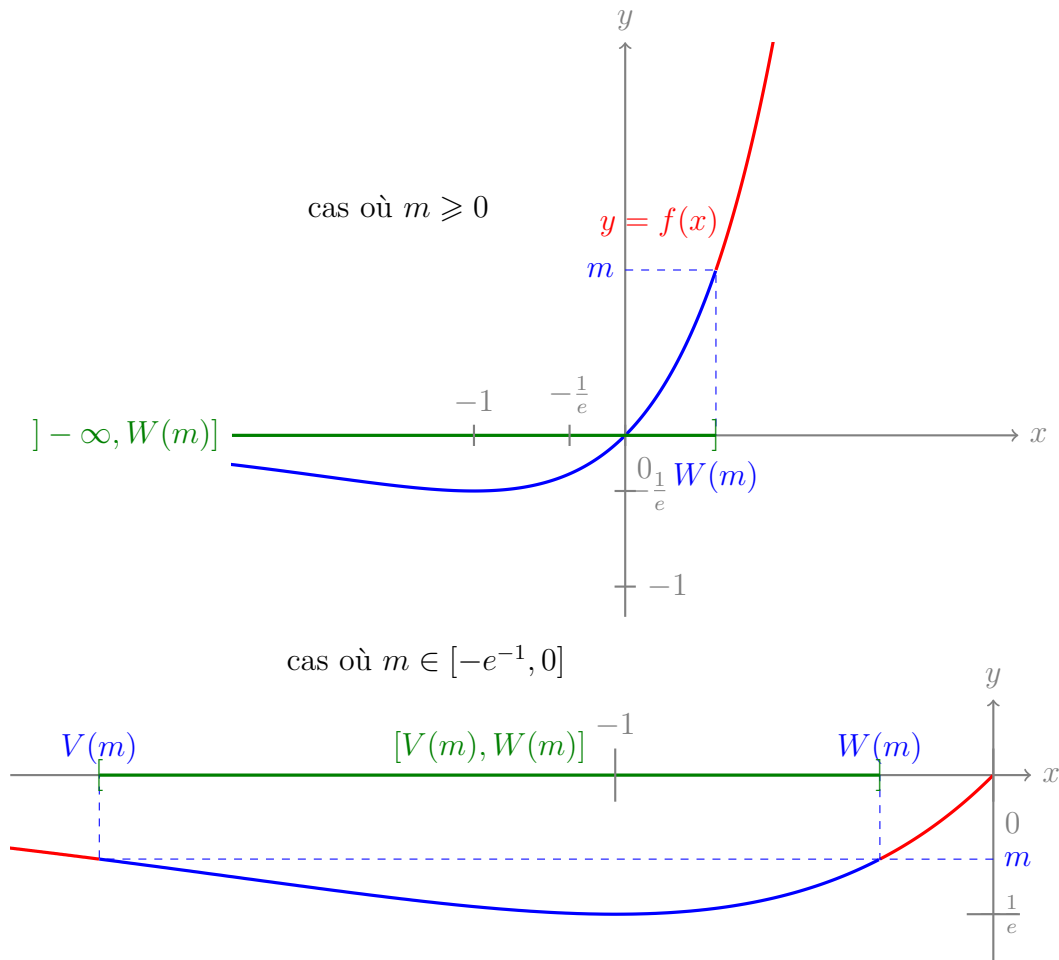
II. A – Première situation

Q 12. Il est clair que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, les données de l'énoncé nous permettent d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ est une loi binomiale de paramètres n et p (puisque'il s'agit de compter le nombre de succès – avoir un billet gagnant – dans une série de n épreuves de Bernoulli – acheter un billet – indépendantes et de même paramètre p). On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

En particulier cette probabilité est nulle si $k > n$.

FIGURE 1 – Représentation graphique des solutions à l'inéquation $xe^x \leq m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.



On en déduit la loi de X en utilisant la formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $((N = n))_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{n'=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n'+k}}{(n'+k)!} \binom{n'+k}{k} p^k (1-p)^{n'} \quad (n' = n - k) \\
 &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n'}}{(n')!}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît la somme de la série exponentielle, évaluée en $\lambda(1-p)$. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

On reconnaît bel et bien une loi de Poisson de paramètre λp , comme attendu. De cela on déduit immédiatement que X admet une espérance et une variance, et qu'on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p.$$

Q 13. Comme X est positive et admet une espérance, on peut utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{\lambda p}{2}.$$

Par conséquent, si $p \leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$, alors $\lambda p \leq 2(1-\alpha)$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1-\alpha,$$

ce qui démontre que la condition (II.1) est satisfaite.

Q 14. On a :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - e^{-\lambda p} - e^{-\lambda p}(\lambda p).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff -e^{-\lambda p}(1 + \lambda p) \leq -\alpha \stackrel{[x e^{-1}]}{\iff} -(1 + \lambda p)e^{-(\lambda p + 1)} \leq -\alpha e^{-1},$$

d'où le résultat en posant $x = -(\lambda p + 1)$.

Q 15. D'après la question précédente, la condition (II.1) équivaut à l'inégalité $f(x) \leq -\alpha e^{-1}$. Comme $\alpha \in]0, 1[$, on a $-\alpha e^{-1} \in]-e^{-1}, 0[$, donc l'étude de la question **Q 10** montre que cette inégalité est vérifiée pour :

$$x \in [V(-\alpha e^{-1}), W(-\alpha e^{-1})] \stackrel{[p = -\frac{x+1}{\lambda}]}{\iff} p \in \left[-\frac{W(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda} \right].$$

D'après la question **Q 13**, tout réel $p \in]0, 1[$ vérifiant $p \leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$ (et il en existe) vérifie la condition (II.1), donc :

$$\left[-\frac{W(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda} \right] \cap]0, 1[\neq \emptyset.$$

Néanmoins l'énoncé est plus précis et veut l'existence d'un plus grand élément $p \in]0, 1[$ tel que la condition (II.1) soit vérifiée. Autrement dit, on veut exclure la possibilité que $\left[-\frac{W(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda} \right] \cap]0, 1[$ ait pour borne supérieure 1 (avec l'intervalle qui y est ouvert). Cette condition est évitée à la condition que $-\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda} < 1$. Par conséquent, il existe un plus grand réel $p \in]0, 1[$ vérifiant la condition (II.1) si et seulement si :

$$\lambda > -1 - V(-\alpha e^{-1}),$$

et dans ce cas $p = -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}$ est le plus grand réel à convenir.

II. B – Deuxième situation

Q 16. Au vu des données, X compte le nombre de « succès » – inversion d'un bit – dans une série de r épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre $1 - p$. Par conséquent X suit une loi binomiale de paramètres r et $1 - p$. On en déduit que X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = r(1 - p), \quad \mathbb{V}(X) = r(1 - p)p.$$

Q 17. Comme X est positive et admet une espérance, on peut utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{r(1 - p)}{2}.$$

Par conséquent, si $r \leq \frac{2(1-\alpha)}{1-p}$, alors $r(1-p) \leq 2(1-\alpha)$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1-\alpha,$$

ce qui démontre que la condition (II.1) est satisfaite.

Q 18. On a :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p^r - rp^{r-1}(1-p). \quad (3)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1-\alpha &\iff -(p^r + rp^{r-1}(1-p)) \leq -\alpha \iff -p^r(p+r(1-p)) \leq -\alpha p \\ &\iff -e^{r \ln(p)}(p+r(1-p)) \leq -\alpha p \end{aligned}$$

Il apparaît « presque » la fonction f , puisque nous avons $r(p-1)e^{r \ln(p)}$ dans le membre de gauche en développant. Il suffit de multiplier par $\frac{\ln(p)}{p-1} > 0$ pour faire apparaître la fonction f (puisque'on aura alors $r \ln(p)e^{r \ln(p)} = f(r \ln(p))$), et c'est ce qui motive ce qui suit (ainsi que le choix de a et x dans l'énoncé). Il restera à effectuer quelques menus réarrangements à cause du terme $e^{r \ln(p)} \cdot p$ que nous devons « inclure » au terme en f , et c'est pourquoi nous n'aurons pas exactement $f(r \ln(p))$ à la fin. Reprenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1-\alpha &\iff -e^{r \ln(p)} \left(\underbrace{\frac{p}{p-1} \ln(p)}_{\substack{\text{terme manquant} \\ \text{dans l'exponentielle}}} - r \ln(p) \right) \leq -\alpha \frac{p \ln(p)}{p-1} \\ &\stackrel{[\times e^{\frac{p}{1-p} \ln(p)}]}{\iff} e^{r \ln(p) + \frac{p \ln(p)}{1-p}} \left(\frac{p}{1-p} \ln(p) + r \ln(p) \right) \leq -\alpha \frac{p \ln(p)}{p-1} e^{-\frac{p}{1-p} \ln(p)}. \end{aligned}$$

Posons $a = \frac{p \ln(p)}{p-1}$ et $x = r \ln(p) - a$. Alors, d'après les calculs ci-dessus, nous avons bien :

$$xe^x \leq -\alpha ae^{-a},$$

d'où le résultat.

Q 19. La condition (II.2) est vérifiée si et seulement si $f(x) \leq -\alpha ae^{-a}$, avec $x = r \ln(p) - a$. Pour résoudre cette inéquation en utilisant la question **Q 10**, encore faut-il situer $-\alpha ae^{-a} < 0$ par rapport à $-e^{-1}$; or $-ae^{-a} = f(-a)$, et $-e^{-1}$ est le minimum de la fonction f , donc : $-ae^{-a} \geq -e^{-1}$. Il est de plus clair que $-ae^{-a} < 0$, donc après multiplication par $\alpha \in]0, 1[$ on en déduit :

$$-e^{-1} < -\alpha ae^{-a} < 0.$$

On peut donc statuer sur l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq -\alpha ae^{-a}$, et on en déduit que la condition (II.2) est vérifiée si et seulement si :

$$x \in \left[V(-\alpha ae^{-a}), W(-\alpha ae^{-a}) \right] \stackrel{[r = \frac{x+a}{\ln(p)}]}{\iff} r \in \left[\frac{W(-\alpha ae^{-a}) + a}{\ln(p)}, \frac{V(-\alpha ae^{-a}) + a}{\ln(p)} \right],$$

en prenant garde au fait que $\ln(p) < 0$ car $p < 1$.

On veut toutefois que r soit un entier naturel non nul (c'est la longueur d'un bloc de bits). Autrement dit, on veut montrer que le plus grand élément de l'ensemble solution :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{W(-\alpha ae^{-a}) + a}{\ln(p)}, \frac{V(-\alpha ae^{-a}) + a}{\ln(p)} \right] \cap \mathbb{N}$$

existe, et est supérieur ou égal à 1.

Or l'égalité (3) avec $r = 1$ donne $P(X \leq 2) = 0 \leq 1 - \alpha$, donc $r = 1$ vérifie trivialement la condition (II.2). Autrement dit, $1 \in \mathcal{S}$. On en déduit que \mathcal{S} est un sous-ensemble de \mathbb{N} non vide et majoré (par $\frac{V(-\alpha a e^{-a}) + a}{\ln(p)}$), donc il admet un plus grand élément, et ce plus grand élément doit être supérieur ou égal à 1 car $1 \in \mathcal{S}$: d'où le résultat.

Q 20. Il suffit de prendre :

$$r = E \left(\frac{V(-\alpha a e^{-a}) + a}{\ln(p)} \right),$$

où E désigne la fonction partie entière.

III – Développement en série entière

III. A – Le théorème binomial d'Abel

Q 21. Il est clair que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\deg(A_k) = k$. La famille $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc une famille de $\mathbb{C}_n[X]$ échelonnée en degré : elle est libre. De plus son cardinal égale $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, donc c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$: d'où le résultat.

Q 22. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $k = 1$ la vérification est immédiate. Supposons donc $k \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} A'_k(X) &= \frac{1}{k!} (X - ka)^{k-1} + \frac{1}{k!} X \cdot (k-1)(X - ka)^{k-2} \\ &= \frac{1}{k!} ((X - ka) + (k-1)X) (X - ka)^{k-2} \\ &= \frac{1}{k!} (kX - ka) (X - ka)^{k-2} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} (X - a) ((X - a) - (k-1)a)^{k-2} = A_{k-1}(X - a), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Q 23. Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Si $j > k$, alors $A_k^{(j)} = 0$ car A_k est de degré k , et donc : $A_k^{(j)}(ja) = 0$.

Supposons à présent $j \leq k$. La question précédente implique, par une récurrence immédiate :

$$A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja),$$

et donc : $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$. Or il est facile de vérifier qu'on a $A_\ell(0) = 1$ si $\ell = 0$ et $A_\ell(0) = 0$ si $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $A_k^{(j)}(ja) = 0$ si $k - j > 0$, tandis que $A_k^{(j)}(ja) = 1$ si $k - j = 0$.

En conclusion :

$$A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Q 24. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Si l'on dérive j fois l'égalité $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k$ et qu'on l'évalue en ja , alors la question précédente nous permet d'écrire :

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \alpha_j A_j^{(j)}(ja) = \alpha_j,$$

d'où le résultat.

Q 25. Soit $(a, x, y) \in \mathbb{C}^3$. On applique la question précédente au polynôme $P = (X + y)^n$, et on a alors :

$$(X + y)^n = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(ka)A_k = P^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(ka)X(X - ka)^{k-1},$$

et comme $P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X + y)^{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on en déduit aisément :

$$(X + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} X(ka + y)^{n-k}(X - ka)^{k-1} = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X(ka + y)^{n-k}(X - ka)^{k-1}.$$

Il reste à évaluer cette égalité en x pour en déduire le résultat voulu :

$$(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x(ka + y)^{n-k}(x - ka)^{k-1}.$$

Q 26. L'identité demandée est triviale si $n = 0$ et nous prenons donc $n \geq 1$. Dérivons la relation de la question précédente (l'égalité polynomiale, ou l'égalité pour une variable réelle x , s'il choquo de dériver selon une variable complexe). On obtient alors, pour tout $(x, a, y) \in \mathbb{C}^3$:

$$n(x + y)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k}(x - ka)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x(ka + y)^{n-k}(k-1)(x - ka)^{k-2}.$$

En posant $x = 0$ la seconde somme s'annule, et donc :

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k}(-ka)^{k-1},$$

D'où le résultat.

Il faut tout de même être prudent sur le sens du terme de la somme correspondant à $k = n$, si $ka + y = 0$ (par exemple si $a = -1$ et $y = n$: on ne devrait pas avoir $(na + y)^0 = 0$ dans ce cas), au risque d'avoir des absurdités dans lesquelles on tombe facilement dans la question **Q 30**. En prévision de cette question, je donne une variante qui isole le terme problématique :

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k}(-ka)^{k-1} + (-na)^{n-1}. \quad (4)$$

III. B – Développement en série entière de la fonction W

Q 27. Nous allons appliquer la règle de D'Alembert. Soit $x \in \mathbb{C}$. Si $x = 0$ alors la série $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ converge évidemment. Supposons donc $x \neq 0$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot |x| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot |x|.$$

Or, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})}$, et l'équivalent classique $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ implique :

$$(n-1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n-1) \times \frac{1}{n} \longrightarrow 1.$$

Par continuité de l'exponentielle en 1, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = e^1 \cdot |x|.$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ converge absolument si $|x| < \frac{1}{e}$, et diverge grossièrement si $|x| > \frac{1}{e}$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{e}$.

Q 28. La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R = \frac{1}{e}$, et on a :

$$S(0) = 0, \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad S^{(n)}(0) = n! a_n = n! \times \frac{(-n)^{n-1}}{n!} = (-n)^{n-1}.$$

Q 29. Nous allons démontrer simultanément la définition et la continuité sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$, en montrant que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (x \mapsto a_n x^n)$ converge normalement (donc uniformément) sur cet intervalle. Posons : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}], f_n(x) = a_n x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ on a bien sûr : $|f_n(x)| \leq |a_n| \left(\frac{1}{e}\right)^n$, et cette majoration est indépendante de x . Donc, par propriété de la borne supérieure : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \|f_n\|_\infty \leq \frac{|a_n|}{e^n}$.

Il reste à montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{e^n}$ converge pour obtenir ce qu'on veut ; mais la règle de D'Alembert donne le cas d'incertitude ici. Par contre nous pouvons obtenir un équivalent asymptotique du terme général grâce à la formule de Stirling, que nous rappelons :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a alors, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{|a_n|}{e^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{n^{3/2}} > 0.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est d'exposant $3/2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{e^n}$ converge, et toujours par ce même théorème on en déduit la convergence normale (et donc uniforme) sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Comme f_n est continue sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$, on en déduit que S est définie et continue sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ en tant que limite uniforme de fonctions continues.

Q 30. Par commodité, posons $a_0 = 1$. Alors :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, \quad 1 + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme $x \mapsto 1 + S(x)$ et $x \mapsto xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ sont des sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{e}$, leur produit de Cauchy converge absolument sur $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [$, et :

$$\forall x \in] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [, \quad (1 + S(x))xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{5}$$

où, par définition d'un produit de Cauchy, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k (n-k) a_{n-k} = na_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} \cdot (n-k) \frac{(-n+k)^{n-k-1}}{(n-k)!} \\ &= na_n + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k}. \end{aligned}$$

Grâce au théorème binomial d'Abel démontré à la question **Q 26**, nous pouvons simplifier cette somme. Pour $n = 0$ elle vaut trivialement 0. Si $n \geq 1$ alors on pose $a = 1$ et $y = -n$ dans (4) et on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad n(-n)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-k)^{k-1} (-n+k)^{n-k} + (-n)^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} + (-n)^{n-1}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} = (n-1)(-n)^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad c_n = na_n - \frac{(n-1)(-n)^{n-1}}{n!} = na_n - (n-1)a_n = a_n,$$

donc finalement l'égalité (5) devient :

$$\forall x \in] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [, \quad (1 + S(x))xS'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q 31. Comme S est de classe C^∞ sur $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [$, c'est aussi le cas de h par produit et composition de fonctions de classe C^∞ , et on a :

$$\forall x \in] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [, \quad h'(x) = S'(x)e^{S(x)} + S(x)S'(x)e^{S(x)} = (1 + S(x))S'(x)e^{S(x)}. \tag{6}$$

En multipliant cette égalité par x , et en utilisant l'égalité $(1 + S(x))xS'(x) = S(x)$ démontrée dans la question précédente, on en déduit :

$$\forall x \in] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [, \quad xh'(x) = S(x)e^{S(x)} = h(x),$$

donc h est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [, \quad xy'(x) - y(x) = 0. \tag{7}$$

Q 32. Posons $I =]-\frac{1}{e}, 0[$ ou $]0, \frac{1}{e}[$. Comme $x \neq 0$ pour tout $x \in I$, l'équation différentielle ci-dessus équivaut à : $\forall x \in I, y'(x) = \frac{1}{x}y(x)$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est le logarithme ; la théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre implique donc que les solutions sur I sont de la forme :

$$y : x \mapsto \alpha e^{\ln(|x|)} = \alpha|x|.$$

Quitte à changer α en $-\alpha$, on en déduit que sur les deux intervalles possibles, les solutions sont de la forme $x \mapsto \alpha x$.

À présent, soit y une application dérivable sur $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ et qui soit solution de (7) sur $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$. En particulier, par restriction, cela définit une solution de (7) sur $] -\frac{1}{e}, 0[$ et $]0, \frac{1}{e}[$. Donc, d'après ce qui précède, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]-\frac{1}{e}, 0[, y(x) = \alpha x, \quad \forall x \in]0, \frac{1}{e}[, y(x) = \beta x.$$

Par continuité de y en 0, on doit avoir $y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$. De plus y est dérivable en 0, ce qui impose : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0}$, c'est-à-dire : $\beta = \alpha$.

De cela on déduit finalement que si y est une solution de (7) sur $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$, alors y est de la forme $x \mapsto \alpha x$ sur $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Réciproquement, cette application est bien une solution de (7), d'où le résultat.

Q 33. Nous avons montré que $h : x \mapsto S(x)e^{S(x)}$ est solution de (7). Donc, d'après la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[, h(x) = \alpha x.$$

Pour déterminer α , on note qu'en utilisant la dérivée calculée en (6), on trouve : $h'(0) = (1 + S(0))S'(0)e^{S(0)} = 1$ (en effet $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$ d'après la question **Q 28**). On a aussi $h' = \alpha$, donc $\alpha = 1$. Ainsi :

$$\forall x \in]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[, S(x)e^{S(x)} = x.$$

Cette égalité peut se réécrire :

$$\forall x \in]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[, f(S(x)) = x. \tag{8}$$

Or, si $x \in]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$, l'équation $f(t) = x$ a une solution $t \in [-1, +\infty[$, à savoir $W(x)$, et éventuellement une solution supplémentaire $t \in]-\infty, -1]$ si $x < 0$, à savoir $V(x)$. Pour exclure la possibilité que $S(x)$ soit égal à cette seconde solution si $x < 0$, il suffit de montrer que $S(x) > -1$. Pour cela, on note que l'égalité (8) donne, quand $x \rightarrow -\frac{1}{e}$ (et parce que S est continue en $-\frac{1}{e}$ d'après la question **Q 29**) : $f\left(S\left(-\frac{1}{e}\right)\right) = -\frac{1}{e}$. Comme -1 est l'unique solution réelle à l'équation $f(t) = -\frac{1}{e}$ (voir question **Q 9**), on en déduit : $S\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$.

Alors, pour tout $x \in]-\frac{1}{e}, 0[$ on a :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!} (-x)^n > \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} \left(-\frac{1}{e}\right)^n,$$

c'est-à-dire : $\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, 0 \right]$, $S(x) > S\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$, ce qu'on voulait démontrer.

En conclusion, pour tout $x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right]$, $S(x)$ est une solution de l'équation $f(t) = x$ d'inconnue $t \geq 1$, et l'étude de la question **Q 9** démontre que cette équation n'admet qu'une seule solution strictement supérieure à 1, qui est $W(x)$ (aussi bien pour $x < 0$ et $x \geq 0$). Donc :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, \quad W(x) = S(x).$$

Q 34. Les applications S et W sont continues sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$: nous l'avons démontré dans la question **Q 29** pour S et dans la question **Q 2** pour W . Par conséquent, leurs limites en $\pm\frac{1}{e}$ égalent leurs valeurs en $\pm\frac{1}{e}$. Prendre la limite quand $x \rightarrow \pm\frac{1}{e}$ dans l'égalité de la question précédente permet donc de démontrer qu'elle reste valable si $x = \pm\frac{1}{e}$. On en déduit que la réponse à la question posée est affirmative, et on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad W(x) = S(x).$$

Pour $x = -\frac{1}{e}$, on en déduit par ailleurs la jolie identité (non demandée) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} = 1.$$

IV – Approximation de W

Q 35. Soit $x \geq 0$. On a :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-xe^{-W(x)}}.$$

Or on sait que $W(x)e^{W(x)} = x$, donc $W(x) = xe^{-W(x)}$. On en déduit :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-W(x)} = W(x),$$

donc $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x : ce qu'il fallait démontrer.

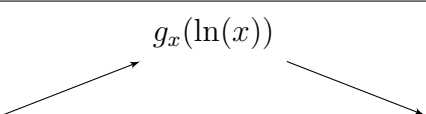
Q 36. Soit $x \geq 0$. Si $x = 0$ alors le résultat à démontrer est évident : supposons $x > 0$. L'application exponentielle est de classe C^2 sur \mathbb{R} , donc par composition ϕ_x l'est aussi, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi'_x(t) = x \cdot (xe^{-t})e^{-xe^{-t}} = x^2e^{-t-xe^{-t}}.$$

De là il est évident que $\phi'_x(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; majorons $e^{-t-xe^{-t}}$ en étudiant les variations de $g_x : t \mapsto -t - xe^{-t}$, clairement dérivable et de dérivée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'_x(t) = -1 + xe^{-t}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g'_x(t) > 0$ si et seulement si $e^{-t} > \frac{1}{x}$, si et seulement si $t < -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. De même pour le cas d'égalité. On en déduit le tableau de variations suivant :

| | | | |
|-----------|---|----------|-----------|
| t | $-\infty$ | $\ln(x)$ | $+\infty$ |
| $g'_x(t)$ | + | 0 | - |
| g_x | $g_x(\ln(x))$  | | |

Comme $g_x(\ln(x)) = -\ln(x) - xe^{-\ln(x)} = -\ln(x) - 1$, on en déduit $g_x(t) \leq -\ln(x) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi'_x(t) = x^2 e^{g_x(t)} \leq x^2 e^{-\ln(x)-1} = x^2 \times \frac{1}{xe} = \frac{x}{e}.$$

En conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \phi'_x(t) \leq \frac{x}{e}.$$

Q 37. Soient $x \in [0, e]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| \stackrel{[\mathbf{Q} 35]}{=} |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))|.$$

Or ϕ_x est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et $|\phi'_x| \leq \frac{x}{e}$ d'après la question précédente. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| = |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leq \frac{x}{e} |w_n(x) - W(x)|.$$

Ceci vaut pour tout $x \in [0, e]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, par une récurrence facile, on obtient :

$$\forall x \in [0, e], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |w_0(x) - W(x)|, \quad (9)$$

et par définition on a $w_0(x) = 1$: d'où le résultat.

Q 38. Soit $a \in]0, e[$. L'application $1 - W$ est bornée sur $[0, a]$ en tant qu'application continue sur un segment (le majorant est facile à expliciter mais ce n'est pas important pour ce qui suit). L'inégalité de la question précédente implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty.$$

Cette majoration est indépendante de x . Donc, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|w_n - W\|_\infty \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty.$$

Comme $\frac{a}{e} \in]0, 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^n = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n - W\|_\infty = 0$. Ceci démontre que la suite de fonctions $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers W : d'où le résultat.

Q 39. La réponse est positive. Nous allons démontrer la version « epsilonlesque » de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in [0, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme W est continue sur \mathbb{R}_+ d'après la question **Q 2**, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [e - \eta, e], \quad |W(x) - W(e)| \leq \varepsilon.$$

Posons $a = e - \eta$. On a $W(e) = 1$ donc, d'après (9) et l'inégalité ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leq |1 - W(x)| \leq \varepsilon.$$

Sur $[0, a]$, nous savons que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers W . Donc, par définition (rappelée en (10)), il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon.$$

En combinant cette inégalité et celle sur $[a, e]$, on a donc l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait :

$$\forall x \in [0, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, e]$ vers W : d'où le résultat.