

Epreuve de mathématiques e3a PSI 2022

Philippe Ducrot, PSI Eiffel Dijon

Exercice 1

1. On trouve, par la méthode du cache ou par coefficients indéterminés

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}.$$

2. Puisque les quantités $\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ sont positives, et que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge (par comparaison avec la série de Riemann d'exposant 4), il suffit de trouver α de telle sorte que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\alpha}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ vaille 1.

Or, pour tout entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} \\ &\rightarrow \frac{1}{6} \text{ quand } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Finalement, $\alpha = 6$.

3.1. X admet une espérance SSI la série $\sum_{n \geq 1} \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge, ce qui est le cas encore par comparaison à une série de Riemann.

Ensuite, pour tout entier $N \geq 1$, et en suivant l'indication de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \sum_{n=1}^N \frac{9}{(n+1)(n+2)} - \sum_{n=1}^N \frac{9}{(n+2)(n+3)} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{9}{(n+1)(n+2)} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{9}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{9}{(N+2)(N+3)} \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \text{ quand } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut $\frac{3}{2}$.

3.2. Par le théorème du transfert, la variable aléatoire $X(X+1)$ admet une espérance, puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{18}{(n+2)(n+3)}$ converge.

Pour tout entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{18}{(n+2)(n+3)} &= \sum_{n=1}^N \frac{18}{n+2} - \sum_{n=1}^N \frac{18}{n+3} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{18}{n+2} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{18}{n+2} \\ &= 6 - \frac{18}{N+3} \\ &\rightarrow 6 \text{ quand } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X(X+1)) = 6$.

3.3. Puisque $X(X+1)$ admet une espérance, X^2 admet une espérance, et X admet une variance, qui vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= 6 - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Si $q = 1$, cette somme vaut $r + 1$.

Sinon, elle vaut $\frac{1 - q^{r+1}}{1 - q}$.

2. $X^p - 1 = (X - 1)(X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1)$. Donc le reste vaut 0 et le quotient $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1$.

3. Pour tout $P \in E_n$, l'application $x \rightarrow \int_1^x P(t) dt$ est une application polynômiale, de degré au plus $n + 1$, et qui s'annule en 1. Le polynôme associé est donc dans E_{n+1} , et admet 1 comme racine : il est divisible par $X - 1$, et le quotient est un polynôme de E_n .

4. D'après la question précédente, l'image de f est incluse dans E_n , et f est linéaire par linéarité de l'intégrale.

5. Si $Q = f(P)$, alors, pour tout réel x , $(x - 1)Q(x) = \int_1^x P(t) dt$, donc en dérivant :

$$P(x) = Q(x) + (x - 1)Q'(x).$$

Ainsi, l'application f est inversible. C'est un automorphisme de E_n dont l'automorphisme réciproque est

$$f^{-1} : Q \in E_n \mapsto Q + (X - 1)Q'.$$

6. D'après la question 2, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(X^k) = \frac{1}{k+1}(1 + X + \dots + X^k)$, donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dots & \frac{1}{n+1} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \vdots \\ & & \frac{1}{3} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

$f^{-1}(1) = 1$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f^{-1}(X^k) = -kX^{k-1} + (k+1)X^k$.
Donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 2 & -2 & \ddots & & \vdots \\ & & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & -n \\ & & & & & n+1 \end{pmatrix}$$

7. Les matrices A et A^{-1} sont triangulaires. La liste de leurs valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité, coïncide avec la liste de leurs éléments diagonaux. Ainsi :

$$\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{1}{k}, k = 1 \dots n+1 \right\} \text{ et } \text{Sp}(A^{-1}) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

8. A et A^{-1} admettent chacune $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Elles sont diagonalisables.

9. Cas de la racine 1 : Q s'écrit $Q = (X-1)^k \tilde{Q}$, où $\tilde{Q}(1) \neq 0$.

Ainsi $f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q' = (X-1)^k [(k+1)\tilde{Q} + (X-1)\tilde{Q}']$, et, puisque $[(k+1)\tilde{Q} + (X-1)\tilde{Q}'](1) \neq 0$, 1 est encore racine de $f^{-1}(Q)$ d'ordre de multiplicité k .

On suppose maintenant que $\alpha \neq 1$. Q s'écrit $Q = (X-\alpha)^k \tilde{Q}$, où $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$, et

$$f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q' = (X-\alpha)^{k-1} [k(X-1)\tilde{Q} + (X-\alpha)(\tilde{Q} + (X-1)\tilde{Q}')].$$

Si α est racine simple de Q , α n'est plus racine de $f^{-1}(Q)$.

Par contre, si $k \geq 2$, α est racine de $f^{-1}(Q)$ d'ordre $k-1$.

10. Soit $p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et Q un vecteur propre de f^{-1} associé à la valeur propre p . Q n'est pas le polynôme nul et $f^{-1}(Q) = pQ$. Ainsi $f^{-1}(Q)$ et Q ont les mêmes racines, au même ordre. D'après l'étude précédente, cela prouve que

la seule racine possible de Q dans (C) est $1 : Q = A(X - 1)^k$, où A est un réel arbitraire et k un entier.

Alors $f^{-1}(Q) = A(k + 1)(X - 1)^k = (k + 1)Q$, et $k + 1 = p$, soit $k = p - 1$.
Finalement, $\ker(f^{-1} - p\text{Id}_{E_n}) = \mathbb{R} \cdot (X - 1)^{p-1}$.

11. Pour tout $p \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, la relation $f^{-1}(Q) = pQ$ équivaut à la relation $f(Q) = \frac{1}{p}Q$. Donc les sous-espaces propres de f sont ceux de f^{-1} .

Exercice 3

1. Puisque f est continue sur \mathbb{R} , elle admet des primitives. On note F l'une d'elle, et g la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x + T) - F(x)$. F étant dérivable, g l'est aussi, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f(x + T) - f(x) = 0$ car f est T périodique. g est donc une fonction constante, et vaut $\int_0^T f(t) dt$ en 0.

2.1. Si on note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, la fonction g est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et ses dérivées s'obtiennent par dérivation termes à termes. Ainsi, $\forall x \in] -R, R[$,

$$\begin{aligned} -4xg(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} -4a_{n-1}x^n \\ g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ xg''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n \end{aligned}$$

$$0 = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - 4a_{n-1}] x^n$$

On obtient ainsi une série entière dont la somme est nulle sur un intervalle d'intérieur non vide contenant 0 : c'est la série entière nulle.

On en déduit que $a_1 = 0$, puis que, pour tout entier $n \geq 1$, $(n + 1)^2 a_{n+1} = 4a_{n-1}$, soit encore $a_{n+1} = \frac{4}{(n + 1)^2} a_{n-1}$.

2.2. On démontre alors par récurrence sur p que, pour tout entier naturel p , $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{1}{p^2(p-1)^2 \dots 1^2} a_0 = \frac{1}{(p!)^2}$.

2.3. La série entière définissant g est donc $\sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p}}{(p!)^2}$. Par utilisation de la règle de d'Alembert, cette série a pour rayon de convergence $+\infty$, et la fonction g est définie sur \mathbb{R} .

3.1. La fonction F est définie sur \mathbb{R} , et, pour tout réel x , $F(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2x \cos(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x \cos(u)} du$ par le changement de variables $u = \pi - t$.

Comme la fonction $u \mapsto e^{2x \cos(u)}$ est 2π -périodique, d'après la question 1, $F(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x \cos(u)} du = F(x)$, et F est une fonction paire.

3.2.1. h est C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ comme composée au sens large de telles fonctions.

3.2.2. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, la fonction $x \mapsto e^{2x \cos(t)}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et, pour tout entier naturel k ,

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (2 \cos(t))^k e^{2x \cos(t)}.$$

On constate alors sur cette expression que la fonction $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.3. On note r un réel strictement positif tel que $I \subset [-r, r]$. Pour tout couple $(x, t) \in I \times [0, 2\pi]$,

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq 2^k e^{2r}.$$

3.2.4. Comme on intègre sur un segment, la majoration trouvée à la question précédente permet d'appliquer le théorème sur les fonctions définies par une intégrale, qui affirme que F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

3.2.5. Le même théorème nous dit que, pour tout réel x ,

$$F^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos(t))^k e^{2x \cos(t)} dt.$$

3.3. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} xF'''(x) - 4xF'(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [4x \cos^2(t) - 4x] e^{2x \cos(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -4x \sin^2(t) e^{2x \cos(t)} dt \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \frac{d}{dt} (e^{2x \cos(t)}) dt \\ &= 2 \left[\sin(t) e^{2x \cos(t)} \right]_0^{2\pi} - 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) e^{2x \cos(t)} dt \\ &= -2F'(x) \end{aligned}$$

4.1. Pour tout complexe z , $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

4.2. Pour tout couple (x, t) de réels,

$$e^{2x \cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cos^n(t) x^n.$$

On fixe x dans \mathbb{R} et, pour tout entier naturel n , on note u_n la fonction $t \in [0, 2\pi] \mapsto \frac{2^n}{n!} \cos^n(t)x^n$.

Chaque fonction u_n est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc intégrable sur ce segment. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 2\pi]$, et a pour somme la fonction $t \mapsto e^{2x \cos(t)}$, continue sur $[0, 2\pi]$.

Enfin, $\int_0^{2\pi} |u_n(t)| dt \leq 2\pi \frac{(2|x|)^n}{n!}$, et, par comparaison à la série exponentielle d'argument $2|x|$, la série $\sum \int_0^{2\pi} |u_n(t)| dt$ converge.

Par application du théorème d'intégration termes à termes des séries de fonctions intégrables, on en déduit que

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n J_n}{n!} x^n.$$

4.3. $J_0 = 2\pi$, $J_1 = 0$.

4.4.

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \cos^{n-2}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2(t)) \cos^{n-2}(t) dt \\ &= J_{n-2} + \frac{1}{n-1} \int_0^{2\pi} \sin(t) \times \frac{d}{dt} (\cos^{n-1}(t)) dt \\ &= J_{n-2} + \frac{1}{n-1} [\sin(t) \cos^{n-1}(t)]_0^{2\pi} - \frac{1}{n-1} J_n \\ &= J_{n-2} - \frac{1}{n-1} J_n. \end{aligned}$$

Finalement, $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$.

4.5. Tout d'abord, $J_{2p+1} = 0$ pour tout entier naturel p .

Ensuite, on montre par récurrence sur p que :

$$J_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times 2\pi.$$

4.6. Finalement, pour tout réel x ,

$$F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}}{(2p)!} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} = g(x).$$

Exercice 4

1. On définit $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des matrices P de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M = I_n$.

Cette relation est équivalente à la relation $MM^T = I_n$, et ce qui prouve que, si $M \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$, $M^T \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$.

Soient P et Q deux matrices orthogonales. Alors $(PQ)^T(PQ) = Q^T P^T PQ = Q^T Q = I_n$, ce qui prouve que $PQ \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2.1. En utilisant le calcul par blocs, on trouve :

$$UV = \begin{pmatrix} \lambda I_n & O_n \\ -A & -AB + \lambda I_n \end{pmatrix} \text{ et } VU = \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & 0_n \\ -\lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

2.2. Les matrices UV et VU ont le même déterminant, donc

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & O_n \\ -A & -AB + \lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n - BA & 0_n \\ -\lambda A & \lambda I_n \end{vmatrix},$$

ce qui prouve que $\lambda^n \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$, puis que $X^n \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$, et enfin $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

3. Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M^T M$ est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

4. La matrice MM^T est pour les mêmes raisons diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale. Or $M^T M$ et MM^T ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes listes de valeurs propres comptées avec leur odm. Il existe donc une matrice diagonale réelle D et deux matrices orthogonales P et Q telles que $M^T M = PDP^T$ et $MM^T = QDQ^T$, soit encore $D = Q^T MM^T Q$.

Ainsi $M^T M = PQ^T MM^T QP^T = R^T MM^T R$ en posant $R = QP^T$, qui est bien une matrice orthogonale d'après la question 1.

5. Si M est une matrice symétrique, $M^T = I_n^T M I_n$ et M est orthotransposable.

6. Si $A \in \mathcal{A}_n$ et $Q \in \mathcal{O}_n$, $(Q^{-1}AQ)^T = Q^T A^T Q = -Q^{-1}AQ$. Donc $Q^{-1}AQ \in \mathcal{A}_n$.

7. Il existe d'abord deux matrices $S \in \mathcal{S}_n$ et $\tilde{A} \in \mathcal{A}_n$ telles que $M = S + \tilde{A}$. Puisque S est symétrique réelle, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale T telles que $S = TDT^T$.

Ainsi $M = T(D + T^{-1}\tilde{A}T)T^T$. On pose alors $A = T^{-1}\tilde{A}T$, qui est une matrice antisymétrique d'après la question 6.

8.1. Les matrices à la fois orthogonales et diagonales de $M_2(\mathbb{R})$ sont les quatre matrices $I_2, -I_2, J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $-J$.

8.2. Soit $L = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$.

$LJ = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $JL^T = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & c \end{pmatrix} = LJ$. Donc $L^T = J^T LJ$, quel que soit L .

8.3. Soit $M = T(D+A)T^T \in M_2(\mathbb{R})$ (décomposition de la question 7). $D+A$ est une matrice de \mathcal{L} , donc $(D+A)^T = J^T(D+A)J$.

Ainsi, $M^T = T(D+A)^T T^T = TJ^T(D+A)JT^T = TJ^T T^T M T J T^T = Q^T M Q$ avec $Q = T J T^T$, qui est orthogonale comme un produit de telles matrices.

Finalement, M est bien orthotransposable.

9.1. Soit $M \in \Delta_n$. Il existe $Q \in \mathcal{O} - n(\mathbb{R})$ telle que $M^T = Q^T M Q$. Alors $M = Q^T M^T Q$, et $[M^T, M] = Q^T M Q Q^T M^T Q - Q^T M^T Q Q^T M Q = Q^T M M^T Q - Q^T M^T M Q = Q^T [M, M^T] Q$: $[M^T, M]$ et $[M, M^T]$ sont (orthogonalement) semblables.

On conclut en constatant que $[M, M^T] = -[M^T, M]$.

9.2. Deux matrices semblables ayant le même déterminant, on en déduit que si M est orthotransposable, $[M^T, M]$ et $-[M^T, M]$ ont le même déterminant. Or $\det(-[M^T, M]) = (-1)^n \det([M^T, M]) = -\det([M^T, M])$ puisque n est ici supposé impair. Donc $\det([M^T, M]) = 0$.