CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2009

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1.

Question 1 :

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 1 :
a) Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non bijectives, comme l'application nulle par exemple, n'ont pas d'inverse pour la loi $\circ$. Donc a) est faux.

b) $(E, +)$ est effectivement un groupe commutatif, mais son élément neutre est l'application nulle et pas l'identité. Donc b) est faux.

c) Il est connu que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cet espace est de dimension infinie car par exemple contient l'espace des polynômes qui est déjà de dimension infinie. Donc c) est vrai.

d) Une application non nulle mais s'annulant au moins une fois, comme l'application $x \mapsto x$ par exemple, n'a pas d'inverse pour $\times$. Donc la réponse d) est fausse.

Question 2 :

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 2 :
a) Si g est une application quelconque continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \int_a^x g(t)\, dt$ est une primitive de g et pas de f (si $g \neq f$). Donc a) est faux.

b) L'ensemble de départ de l'application φ_a est E et pas $\mathbb{R}$. φ_a n'a donc aucune chance d'être prolongeable en a. Donc b) est faux.

c) et d) f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq a$, on a $\varphi_a(f)(x) = \dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}$. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f et donc $\varphi_a(f)$ tend vers $F'(a) = f(a)$ quand x tend vers a. Donc c) est vrai et d) est faux.

Question 3 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 3 :
a) La raison invoquée n'est pas la bonne car dire que φ_a est un endomorphisme de E équivaut à dire que φ_a est une

application de E dans E vérifiant $\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi_a(f+g)=\varphi_a(f)+\varphi_a(g)$ et $\forall f\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi_a(\lambda f)=\lambda\varphi_a(f)$. Donc a) est faux.

b) $(\varphi_a(f)+\varphi_a(g))(a)=f(a)+g(a)=\varphi_a(f+g)(a)$ et pour $x\neq a$,

$$\varphi_a(f+g)(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x(f(t)+g(t))\,dt=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt+\frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)\,dt=(\varphi_a(f)+\varphi_a(g))(x).$$

Néanmoins b) est faux car il manque la condition sur la loi externe.

c) et d) La raison invoquée permet d'affirmer que $\varphi_a(E)\subset E$. Donc c) et d) sont faux.

Question 4 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 4 :

a) et b) Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$. De plus, pour $x\neq a$,

$$\varphi_a(f)'(x)=\frac{1}{x-a}\times f(x)-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{1}{x-a}(f(x)-\varphi_a(x)).$$

Donc a) est vrai et b) est faux (la dérivée de l'application $x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$ est l'application $x\mapsto f(x)$ et n'est pas l'application $x\mapsto f(x)-f(a)$).

c) Pour $x>a$, $\varphi_a(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x(t-a)\,dt=\frac{1}{2(x-a)}\left[(t-a)^2\right]_a^x=\frac{1}{2}(x-a)=\frac{1}{2}g(x)$.

Pour $x<a$, $\varphi_a(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x-(t-a)\,dt=-\frac{1}{2(x-a)}\left[(t-a)^2\right]_a^x=-\frac{1}{2}(x-a)=\frac{1}{2}|x-a|=\frac{1}{2}g(x)$.

En résumé, pour $x\neq a$, $\varphi_a(g)(x)=\frac{1}{2}g(x)$. Ceci reste vrai pour $x=a$ par continuité. Donc c) est vrai.

d) Puisqu'on a déjà deux réponses exactes, d) est faux. Néanmoins, la fonction g du c) fournit un exemple d'élément de E dont l'image par φ_a n'est pas dérivable en a.

Question 5 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 5 :

a) et b) La formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 1 en a s'écrit $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)=f(a)-f'(a)(a-x)+o(x-a)$. Donc a) est vrai et b) est faux.

c) et d) Puisque f est dérivable en a, f admet un développement limité d'ordre 1 en a et donc l'application $x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$ admet un développement limité d'ordre 2 en a. Quand x tend vers a,

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)=F'(a)(x-a)+\frac{F''(a)}{2}(x-a)^2+o((x-a)^2)=f(a)(x-a)+\frac{f'(a)}{2}(x-a)^2+o((x-a)^2)$$

et donc $\varphi_a(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{2}(x-a)+o(x-a)$ puis

$$\frac{1}{x-a}(\varphi_a(f)(x)-f(a))=\frac{f'(a)}{2}+o(1).$$

Donc c) est vrai et d) est faux.

Question 6 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) VRAI

Explication 6 :
a) Il manque au moins une hypothèse de continuité en a et donc a) est faux.

b), c) et d) $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après 2.c) et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ d'après 4.a). De plus, quand x tend vers a,

$$\begin{aligned}[\varphi_a(f)]'(x) &= \frac{f(x) - \varphi_a(f)(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{\varphi_a(f)(x) - f(a)}{x - a} \\ &= (f'(a) + o(1)) - \left(\frac{f'(a)}{2} + o(1)\right) = \frac{f'(a)}{2} + o(1).\end{aligned}$$

En résumé,
- $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- $\varphi_a(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$,
- $[\varphi_a(f)]'$ a une limite réelle quand x tend vers a, à savoir $\dfrac{f'(a)}{2}$.

D'après un théorème classique d'analyse, $\varphi_a(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc b) est vrai, c) est faux et d) est vrai.

Question 7 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 7 : Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}f \in \mathrm{Ker}\varphi_a &\Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ et } \forall x \neq a,\ \frac{1}{x - a}\int_a^x f(t)\ dt = 0 \\ &\Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ et } \forall x \neq a,\ \int_a^x f(t)\ dt = 0 \\ &\Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ et } \forall x \neq a,\ f(x) = 0 \text{ (en dérivant)} \\ &\Leftrightarrow f = 0.\end{aligned}$$

a) et c) D'après ci-dessus, $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Donc a) est vrai. De même, c) est vrai.

$$f \in \mathrm{Ker}\varphi_a \Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ et } \forall x \neq a,\ \frac{1}{x - a}\int_a^x f(t)\ dt = 0.$$

b) $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$ ne contient pas les constantes non nulles et donc b) est faux.

d) La raison invoquée est fausse car il manque l'hypothèse « dimension finie ».

Question 8 :

a) VRAI
b) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 8 : a) D'après 7.c), φ_a est injective et donc s'il existe une solution, elle est unique. De plus, d'après 4.c), $\varphi_a(2g_a) = g_a$. Donc, a) est vrai.

b) b) est donc faux.

c) et d) D'après 4.a), pour toute f de E, $\varphi_a(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et en particulier en $b \neq a$. Donc d) est vrai et c) est faux. On note que φ_a n'est pas surjectif.

Question 9 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
D) FAUX

Explication 9 :
a) La raison invoquée ne suffit pas à faire de ψ_a un endomorphisme de F : il manque au moins la linéarité.

b) b) est vrai d'après 7.c).

c) $\dim F = n + 1$ et donc c) est faux.

d) ψ_a peut être surjectif bien que φ_a ne le soit pas. d) est faux.

Question 10 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) VRAI

Explication 10 :
a) B' est une base de F (famille de $n + 1$ polynômes de degrés deux à deux distincts et inférieurs à n) mais pas pour la raison invoquée.

b) et c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$ (erreur d'énoncé probable).

$$(X - a)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-a)^{k-i} X^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} (-a)^{k-i} X^i.$$

Donc, pour $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$, le coefficient ligne i colonne k de P est $\binom{k}{i}(-a)^{k-i}$. b) est vrai et c) est faux.

d) P est la matrice de la base B' dans la base B et donc P est inversible. P^{-1} est la matrice de B dans B'. Comme

$$X^k = ((X - a) + a)^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} a^{k-i} (X - a)^i,$$

le coefficient ligne i colonne k de P^{-1} est $\binom{k}{i} a^{k-i}$ et donc d) est vrai.

Question 11 :

a) FAUX
b) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 11 :
a) et b) Une matrice de passage est inversible (et une matrice inversible est une matrice de passage). Les formules de changement de bases fournissent $A' = P^{-1}AP$ et donc $A = PA'P^{-1}$. a) est faux et b) est vrai.

c) et d) Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Pour $x \neq a$,

$$\psi_a((X-a)^{i-1})(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)^{i-1}\ dt = \frac{1}{x-a} \times \frac{1}{i}(x-a)^i = \frac{1}{i}(x-a)^{i-1},$$

ce qui reste vrai pour $x = a$ par continuité. Donc $\psi_a((X-a)^{i-1}) = \dfrac{1}{i}(x-a)^{i-1}$. c) est vrai et d) est faux.

Question 12 :

a) FAUX
b) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 12 : Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(i+1)A - I_{n+1} &= (i+1)PA'P^{-1} - I_{n+1} = P((i+1)A' - I_{n+1})P^{-1}\\ &= P \times \text{diag}\left(\frac{i+1}{1} - 1, \frac{i+1}{2} - 1, \ldots, \frac{i+1}{n+1} - 1\right) \times P^{-1}.\end{aligned}$$

Cette matrice est non inversible si et seulement si $i+1 \in [\![1, n+1]\!]$ ou encore $i \in [\![0, n]\!]$. Donc, si $i = n+1$, $\text{rang}((i+1)A - I_{n+1}) = n+1$ et $\dim(\text{Ker}((i+1)A - I_{n+1})) = 0$
a) et b) sont faux.

c) et d) Pour $Q \in F$, $\psi_a(Q) = \dfrac{Q}{i+1} \Leftrightarrow ((i+1)\psi_a - \text{Id}_F)(Q) = 0 \Leftrightarrow Q \in \text{Ker}((i+1)\psi_a - \text{Id}_F)$. Si $i = n+1$, $\texttt{textKer}((i+1)\psi_a - \text{Id}_F)$ est de dimension 0 et donc d) est faux. Si $i = 1$, $\text{Ker}((i+1)\psi_a - \text{Id}_F)$ n'est pas de dimension 0 et en particulier contient une infinité d'éléments et c) est faux.

Exercice 2.

Question 13 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 13 : a) et b) Les points F et F' ont pour coordonnées respectives $(\varepsilon a, 0)$ et $(-\varepsilon a, 0)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}M(x,y) \in L_a &\Leftrightarrow MF \times MF' = a^2 \Leftrightarrow ((x-\varepsilon a)^2 + y^2)((x+\varepsilon a)^2 + y^2) = a^4\\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2+a^2-2\varepsilon ax)(x^2+y^2+a^2+2\varepsilon ax) = a^4\\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 + 2a^2(x^2+y^2) - 4a^2x^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).\end{aligned}$$

Donc a) est vrai et b) est faux.

c) et d)

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \Leftrightarrow x^4+2x^2y^2+y^4 = 2a^2x^2-2a^2y^2$$
$$\Leftrightarrow y^4+2(x^2+a^2)y^2+x^4-2a^2x^2 = 0. \quad (E)$$

Le discriminant réduit de l'équation $X^2+2(x^2+a^2)X+x^4-2a^2x^2=0$ est

$$\Delta' = (x^2+a^2)^2-(x^4-2a^2x^2) = a^4+4a^2x^2.$$

Donc, $(E) \Leftrightarrow y^2 = -(x^2+a^2) \pm \sqrt{a^4+4a^2x^2} \Leftrightarrow y^2 = -(x^2+a^2)+\sqrt{a^4+4a^2x^2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\sqrt{a^4+4a^2x^2}-(x^2+a^2)}$.
Donc c) est faux et d) est vrai.

Question 14 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 14 : L_a est la réunion de la courbe Γ_1 d'équation polaire $\rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$ et de la courbe Γ_2 d'équation polaire $\rho = -a\sqrt{2\cos(2\theta)}$. Mais,

$$M_2(\theta) = [\theta, \rho_2(\theta)] = [\theta, -\rho_1(\theta)] = [\theta+\pi, \rho_1(\theta)] = [\theta+\pi, \rho_1(\theta+\pi)] = M_1(\theta+\pi).$$

Donc, les courbes Γ_1 et Γ_2 sont les mêmes. L_a est la courbe d'équation polaire $\rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$. Notons D le domaine de définition de la fonction $\theta \mapsto a\sqrt{2\cos(2\theta)}$.

a) $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et pour un tel θ, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$. Par suite,

$$M_(-\theta) = [-\theta, \rho(-\theta)] = [-\theta, \rho(\theta)] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

L_a est alors symétrique par rapport à (Ox). a) est faux.

b) $\theta \in D \Leftrightarrow \pi-\theta \in D$ et pour un tel θ, $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$. Par suite,

$$M_(\pi-\theta) = [\pi-\theta, \rho(\pi-\theta)] = [\pi-\theta, \rho(\theta)] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

L_a est alors symétrique par rapport à (Oy). b) est vrai.

c) $\theta \in D \Leftrightarrow \theta+\pi \in D$ et pour un tel θ, $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$. Par suite,

$$M_(\theta+\pi) = [\theta+\pi, \rho(\theta+\pi)] = [\theta+\pi, \rho(\theta)] = s_O(M(\theta)).$$

L_a est alors symétrique par rapport à l'origine O. c) est faux.

d) La fonction ρ est 2π-périodique. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit $[-\pi, \pi]$.
D'après a), il suffit de construire la portion de courbe obtenue pour $\theta \in [0, \pi]$ et on obtient ensuite la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis d'après b), il suffit de construire la portion de courbe obtenue pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis réflexion d'axe (Ox).
Pour un tel θ, $\rho(\theta)$ existe si et seulement si $\cos(2\theta) \geq 0$ ou encore $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Donc on construit la portion de courbe obtenue quand θ décrit $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis réflexion d'axe (Ox), soit deux symétries. d) est faux.

Question 15 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 15 :
a) La fonction ρ n'est pas dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$. Donc, a) est faux

b) Une composée de deux fonctions décroissantes sur des domaines appropriés devrait être croissante. Donc, b) est faux.
c) Le point $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ est l'origine et pas le point $(0, a)$. Donc c) est faux.

d) La tangente en $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = O$ est la droite passant par O d'angle polaire $\dfrac{\pi}{4}$ ou encore la droite d'équation $y = x$. Mais θ décrit $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et la portion de courbe correspondante est au-dessous de cette tangente. d) est faux.

Question 16 :

a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

Explication 16 :
a) et b) La courbe complète est obtenue pour $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[-\pi, -\dfrac{3\pi}{4}\right]$. De plus $x \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \iint_{(x,y)\in L_a\cap\{(x,y)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{R},\ x\geq 0\}} = \iint_{\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],\ \rho\in\left[0,a\sqrt{2\cos(2\theta)}\right]} \rho d\rho d\theta \text{ (donc, a) est faux)}\\
&= \iint_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ \rho\in\left[0,a\sqrt{2\cos(2\theta)}\right]} 2\rho d\rho d\theta \text{ (par symétrie et donc, b) est vrai)}\\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{a\sqrt{2\cos(2\theta)}} 2\rho d\rho\right) d\theta = \int_0^{\pi/4}\left(a\sqrt{2\cos(2\theta)}\right)^2\ d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos(2\theta)\ d\theta\\
&= a^2 \text{ (et donc c) est vrai et d) est faux).}
\end{aligned}$$

Question 17 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) VRAI

Explication 17 :
a) Puisque $k \neq 0$, l'équation (P2) n'a pas de solution quand $M = \Omega$. Donc a) est faux.

b) Soit $M \neq \Omega$. (P1)$\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}/\ M' = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. Pour un tel point M',

$$M' = I_k^{\Omega}(M) \Leftrightarrow \overline{\Omega M} \times \lambda\overline{\Omega M} = k \Leftrightarrow \lambda = \frac{k}{\Omega M^2}.$$

λ existe et est unique. Il en est de même de M' et b) est vrai.

c) et d) M et M' jouent des rôles symétriques ou encore $\mathsf{M}' = \mathrm{I}_k^{\Omega}(\mathsf{M}) \Leftrightarrow \mathsf{M} = \mathrm{I}_k^{\Omega}(\mathsf{M}')$. Ceci montre que d) est vrai et donc c) est faux.

Question 18 :

a) VRAI
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 18 :

a) Puisque Ω, N et N' sont alignés, $\overline{\Omega\mathsf{N}\Omega\mathsf{N}'} = \overrightarrow{\Omega\mathsf{N}}.\overrightarrow{\Omega\mathsf{N}'} = \mathrm{Re}\left(\overline{z_{\overrightarrow{\Omega\mathsf{N}}}}z_{\overrightarrow{\Omega'\mathsf{N}}}\right) = \mathrm{Re}\left((\overline{z-\omega})(z'-\omega)\right)$ et $0 = [\overrightarrow{\Omega\mathsf{N}}, \overrightarrow{\Omega\mathsf{N}'}] = \mathrm{Im}\left((\overline{z-\omega})(z'-\omega)\right)$.
Donc, $(\overline{z-\omega})(z'-\omega)$ est réel et donc $\mathrm{Re}\left((\overline{z-\omega})(z'-\omega)\right) = (\overline{z-\omega})(z'-\omega) = (z-\omega)(\overline{z'-\omega})$. a) est vrai.

b) D'après a),

$$\mathsf{N}' = \mathrm{I}_k^{\Omega}(\mathsf{N}) \Leftrightarrow (\overline{z-\omega})(z'-\omega) = k \Leftrightarrow z' = \omega + \frac{k}{\overline{z-\omega}}.$$

Donc b) est vrai.

c) et d) Puisqu'il y a au plus deux réponses exactes c) et d) sont nécessairement faux. On peut noter que

$$\mathsf{N}' = \mathsf{N} \Leftrightarrow z = \omega + \frac{k}{\overline{z-\omega}} \Leftrightarrow (z-\omega)(\overline{z-\omega}) = k \Leftrightarrow |z-\omega|^2 = k.$$

Cette équation n'a pas de solution si $k < 0$ et admet le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$ si $k > 0$. Le cas $k = 0$ est exclu dans l'énoncé de la question 17.

Question 19 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 19 :
a) Si $\Omega = \mathsf{O}$, l'expression complexe de $\mathrm{I}_k^{\Omega} \circ \mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}}$ est d'après 18.b)

$$z' = 0 + \frac{k}{\left(\overline{0 + \frac{\alpha}{\overline{z-0}} - 0}\right)} = \frac{k}{\alpha}z$$

puis l'expression complexe de $\left(\mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}}\right)^{-1} \circ \mathrm{I}_k^{\Omega} \circ \mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}} = \mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}} \circ \mathrm{I}_k^{\Omega} \circ \mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}}$ est

$$z' = \frac{\alpha}{\left(\overline{\frac{k}{\alpha}z}\right)} = \frac{\alpha^2/k}{\overline{z}}$$

Ainsi, $\left(\mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}}\right)^{-1} \circ \mathrm{I}_k^{\Omega} \circ \mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}} = \mathrm{I}_{\frac{\alpha^2}{k}}^{\mathsf{O}}$ et a) est vrai.

b) Si $\mathsf{N} \neq \mathsf{O}$, $\mathrm{I}_\alpha^{\mathsf{O}}(\mathsf{N}) = \Omega \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\overline{z}} = \omega \Leftrightarrow z = \frac{\alpha}{\overline{\omega}}$. b) est faux.

c) et d) On suppose que $\Omega \neq \mathsf{O}$ et z.

$$z' = \frac{\alpha}{\left(\overline{\omega + \frac{k}{\left(\overline{\frac{\alpha}{(\overline{z})} - \omega}\right)}}\right)} = \frac{\alpha}{\overline{\omega} + \frac{k}{\frac{\alpha}{(\overline{z})} - \omega}} = \frac{\alpha}{\overline{\omega} + \frac{k\overline{z}}{\alpha - \omega\overline{z}}} = \frac{\alpha\left(\alpha - \omega\overline{z}\right)}{\overline{\omega}\left(\alpha - \omega\overline{z}\right) + k\overline{z}} = \frac{\alpha\left(\alpha - \omega\overline{z}\right)}{\alpha\overline{\omega} + \overline{z}\left(k - |\omega|^2\right)}$$

Donc c) est faux. D'autre part, on doit avoir $z \neq \dfrac{\alpha}{\overline{\omega}}$ et d) est faux.

Question 20 :

a) FAUX
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 20 : Si de plus $k = |\omega|^2$ et $\omega = a + ib$, l'expression complexe de $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est

$$z' = \frac{\alpha\,(\alpha - \omega\overline{z})}{\alpha\overline{\omega}} = -\frac{\omega}{\overline{\omega}}\overline{z} + \frac{\alpha}{\overline{\omega}}$$

a) $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une similitude plane indirecte et donc est effectivement une application affine. Mais $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(O)$ est le point d'affixe $\dfrac{\alpha}{\overline{\omega}} = \dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2}$. a) est faux.

b), c) et d) La partie linéaire de $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ admet pour expression complexe

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{\omega}{\overline{\omega}}\overline{z} = -\frac{a+ib}{a-ib}(x-iy) = \frac{-(a+ib)^2}{|\omega|^2}(x-iy) = \frac{1}{|\omega|^2}(-a^2+b^2-2iab)(x-iy) \\ &= \frac{1}{|\omega|^2}\left((b^2-a^2)x - 2aby + i(-2abx + (a^2-b^2)y)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que la partie linéaire de $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ a pour matrice dans la base canonique $A = \dfrac{1}{|\omega|^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$.

$\|C_1\| = \|C_2\| = \dfrac{1}{|\omega|^2}\sqrt{(b^2-a^2)^2+4a^2b^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4} = 1$ et $C_1.C_2 = 0$. Donc A est une matrice orthogonale. De plus, $\det(A) = -1$ et A est une matrice orthogonale négative.

La partie linéaire de $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est donc une symétrie orthogonale vectorielle et b) est faux. D'autre part, La matrice identité est orthogonale et possède des points fixes sans pour autant être une symétrie orthogonale vectorielle. Donc d) est faux.
Puisque la partie linéaire de $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une symétrie orthogonale vectorielle, $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine si et seulement si $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ a des points fixes. Or, ici $k > 0$ et d'après 18.c)

$$\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(M) = M \Leftrightarrow I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(M) = I_\alpha^O(M) \Leftrightarrow I_\alpha^O(M) \in \mathscr{C}\left(\Omega, \sqrt{k}\right) \Leftrightarrow M \in I_\alpha^O\left(\mathscr{C}\left(\Omega, \sqrt{k}\right)\right)$$

Ainsi, $\left(I_\alpha^O\right)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ a des points fixes et donc c) est vrai.

Question 21 :

a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 21 :

a), b), c) et d)

$$\begin{aligned}z' &= \frac{\alpha^2-\alpha\omega\overline{z}}{\alpha\overline{\omega}+\overline{z}\left(k-|\omega|^2\right)} = \frac{-\dfrac{\alpha\omega}{k-|\omega|^2}\left(\alpha\overline{\omega}+\overline{z}\left(k-|\omega|^2\right)\right)+\alpha^2+\dfrac{\alpha^2|\omega|^2}{k-|\omega|^2}}{\alpha\overline{\omega}+\overline{z}\left(k-|\omega|^2\right)}\\
&= -\frac{\alpha\omega}{k-|\omega|^2}+\frac{k\alpha^2}{k-|\omega|^2}\frac{1}{\alpha\overline{\omega}+\overline{z}\left(k-|\omega|^2\right)}\\
&= \frac{\alpha\omega}{|\omega|^2-k}+\frac{k\alpha^2}{\left(|\omega|^2-k\right)^2}\frac{1}{\overline{z}-\dfrac{\alpha\overline{\omega}}{|\omega|^2-k}}\end{aligned}$$

Donc a) est vrai et b) est faux. De plus, $\left(I_{\alpha}^{O}\right)^{-1}\circ I_{k}^{\Omega}\circ I_{\alpha}^{O}=I_{\beta}^{S}$ où S est le point d'affixe $\dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2-k}$ et $\beta=\dfrac{k\alpha^2}{\left(|\omega|^2-k\right)^2}$. Donc c) est vrai et d) est faux.

Question 22 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 22 :

a) Dans tous les cas, C_a est une hyperbole de centre O (si $a=\dfrac{FF'}{2}\neq 0$). a) est faux.

b) $x^2-y^2=2a^2\Leftrightarrow \rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=2a^2\Leftrightarrow \rho^2\cos(2\theta)=2a^2$. Maintenant si θ décrit $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, on a jamais $\cos(2\theta)=1$ et donc jamais $\rho^2=2a^2$ et on n'obtient donc pas le point $\left(a\sqrt{2},0\right)$ de C_a. b) est faux.

c) Le produit $\overline{OM}\times\overline{OM'}$ peut être strictement négatif. Donc c) est faux.

d) Soit $M=\left[\theta,\sqrt{\cos(2\theta)}\right]$ un point quelconque de $L_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Son image par I_1^O est le point M' d'affixe

$$z'=\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}e^{-i\theta}}=\frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}e^{i\theta},$$

Donc $I_1^O\left(L_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$ est la courbe d'équation polaire $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$. Comme en 14., ceci équivaut à $\rho^2\cos(2\theta)=1$ et donc $I_1^O\left(L_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=C_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ou encore $I_1^O\left(C_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=L_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. d) est vrai.

Exercice 3

Question 23 :

a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

Explication 23 :

a) f n'est pas dérivable en 0 si $0<p<1$.

b) b) est vrai.

c) Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, f est injective sur $\mathbb{R}^+$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathrm{f}(\mathbb{R}^+)$. c) est vrai.

d) L'hypothèse « f est continue sur $\mathbb{R}^+$ » servirait à affirmer que $\mathrm{f}(\mathbb{R}^+)$ est un intervalle mais pas que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathrm{f}(\mathbb{R}^+)$. d) est faux.

Question 24 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 24 :

a) f n'est pas nécessairement dérivable en 0 et de toute façon, l'hypothèse de dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$ ne suffit pas pour affirmer la dérivabilité de g. Il manque : « f' ne s'annule pas ». a) est faux.

b) L'application $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais sa réciproque $g\ :\ x \mapsto x^2$ est dérivable en $f(0) = 0$. Donc b) est faux.

c) Si $p = 1$, $\forall t \geq 0$, $f(t) = 2t$ puis $g(t) = \dfrac{t}{2}$ et $g'(0) = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{1}$. c) est faux.

d) La raison invoquée est insuffisante pour affirmer que g n'est pas dérivable en 0 (et il est d' ailleurs graphiquement clair que g est dérivable en 0 pour $0 < p < 1$). d) est faux.

Question 25 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 25 :

a) et b) Si $p > 1$, $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{a}{p}$. Donc a) et b) sont faux.

c) f n'est pas toujours dérivable en 0. Donc c) est faux.

d) Si $0 < p < 1$, $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{a}{pt^{p-1}} = \dfrac{a}{p}t^{1-p}$. Donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

Pour $t > 0$, $\varphi(t) - t = \dfrac{(p-1)t^p + a}{p\left(t^{p-1}+1\right)} - t = \dfrac{-t^p - pt + a}{p\left(t^{p-1}+1\right)} = \dfrac{a - f(t)}{f'(t)}$. Par suite, $\varphi(t) = t \Leftrightarrow f(t) = a \Leftrightarrow t = g(a)$. Donc d) est vrai.

D) $\mathrm{dom}(T_2) = 2 \neq 1$ et donc D) est faux.

Question 26 :

a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 26 :

a) $f\left(\sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right) = \dfrac{a}{1-p} + p\sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}} > \dfrac{a}{1-p} > a$ (car $0 < p < 1$ et $a > 0$) et puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}} = g\left(f\left(\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right)\right) > g(a).$$

Déjà pour $0 \leq t \leq \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}$, on a $\varphi(t) \geq 0$. Ensuite, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{p(p-1)t^{p-1}(t^{p-1}+1) - ((p-1)t^p + a)(p-1)t^{p-2}}{p(t^{p-1}+1)^2} = \frac{(p-1)t^{2p-2} + p(p-1)t^{p-1} - a(p-1)t^{p-2}}{p(t^{p-1}+1)^2}\\ &= \frac{(1-p)t^{p-2}(-t^p - pt + a)}{p(t^{p-1}+1)^2} = \frac{(1-p)t^{p-2}(a - f(t))}{p(t^{p-1}+1)^2}\end{aligned}$$

Cette dernière expression est du signe de $a - f(t)$ et donc φ est strictement croissante sur $[0, g(a)]$ et strictement décroissante sur $\left[g(a), \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$. φ admet sur $\left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$ un maximum en $g(a)$ égal à $g(a)$ d'après 25.d). Donc a) est vrai. (En particulier, les intervalles $\left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$ et $[0, g(a)]$ sont stables par φ)

b) Si on prend $u_0 > \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}$, on a $u_1 = \varphi(u_0) < 0$ et u_2 n'existe pas. Donc b) est faux.

c) Si $g(a) < u_0 < \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}$ alors $0 < u_1 < g(a) < u_0$ puis d'après 25.c), $u_2 = \varphi(u_1) > u_1$. En résumé, $u_1 < u_2 < u_0$. Donc c) est faux.

d) Si u converge, c'est vers un point fixe de φ élément de $\left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$ (car $\left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$ est fermé, stable par φ et que φ est continue sur $\left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$) et donc soit 0, soit $g(a)$, d'après 25.d). $\sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}$ n'est ni 0, ni $g(a)$ d'après 25.a). Donc d) est faux.

Question 27 :

A) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 27 :

a) $f\left(\dfrac{a}{p}\right) = \left(\dfrac{a}{p}\right)^p + a > a$ et donc $\dfrac{a}{p} = g\left(f\left(\dfrac{a}{p}\right)\right) > g(a)$. D'après 26., pour $t \in \left[g(a), \dfrac{a}{p}\right]$, $f(t) \geq f(g(a)) = a$ et

$$|\varphi'(t)| = \frac{p-1}{p}\frac{t^{p-2}(f(t)-a)}{(t^{p-1}+1)^2} = \frac{p-1}{p}\frac{t^{2p-2} + pt^{p-1} - at^{p-2}}{(t^{p-1}+1)^2}.$$

Maintenant, pour $t \in \left[g(a), \dfrac{a}{p}\right]$,

$$\begin{aligned}\frac{t^{2p-2} + pt^{p-1} - at^{p-2}}{(t^{p-1}+1)^2} - 1 &= \frac{(t^{2p-2} + pt^{p-1} - at^{p-2}) - (t^{2p-2} + 2t^{p-1} + 1)}{(t^{p-1}+1)^2} = \frac{(p-2)t^{p-1} - at^{p-2} - 1}{(t^{p-1}+1)^2}\\ &= \frac{t^{p-2}(pt - a) - 2t^{p-1} - 1}{(t^{p-1}+1)^2} \leq 0,\end{aligned}$$

et donc $|\varphi'(t)| \leq \dfrac{p-1}{p}$. a) est vrai.

b) L'ordre des quantificateurs signifie en particulier que θ ne dépend pas de t et t' ce qui est faux. Donc b) est faux.

c) Si par hasard, on peut effectuer le travail classique à partir de l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$|u_{n+1} - g(a)| = |\varphi(u_n) - \varphi(g(a))| \leq \frac{p-1}{p}|u_n - g(a)| \text{ et c) est faux.}$$

d) L'inégalité $\left|\dfrac{p-1}{p}\right| < 1$ serait peut-être suffisante mais en tout cas l'inégalité $\left|\dfrac{p-1}{p}\right| \leq 1$ ne l'est pas. d) est faux.

Exercice 4

Question 28 :
a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) FAUX

Explication 28 :

a) P est un sous-espace vectoriel de E car P contient la fonction nulle et une combinaison linéaire de fonctions paires est paire. a) est faux.

b) La fonction nulle est paire et impaire. b) est faux.

c) $\mathsf{P} \cap \mathrm{I} = \{0\}$ (une intersection de sous-espaces est un sous-espace et n'est donc jamais vide). c) est faux.

d) La bonne décomposition est $\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. d) est faux

Question 29 :
a) FAUX
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 29 :

a) La continuité sur $]-1, 1[$ne suffit pas mais la continuité sur $[-1, 1]$ suffit. a) est faux.

b) La fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue par morceaux et positive sur $[-1, 1]$, d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$ mais n'est pas nulle. b) est faux. Le bon théorème est « si f est continue, positive, d'intégrale nulle sur le segment $[a, b]$ alors f est nulle ».

c) E n'est pas de dimension finie et n'est donc pas un espace euclidien. c) est faux.

d) φ est un produit scalaire sur E qui n'est pas de dimension finie. Donc d) est vrai.

Question 30 :
a) VRAI
b) FAUX
c) VRAI
d) FAUX

Explication 30 :

a) et b) fg est impaire. Donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)g(t)dt = -\int_{0}^{1} f(t)g(t)dt$. a) est vrai et b) est faux.

c) et d) Puisque fg est impaire, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = 0$. Donc, si $f \in \mathsf{P}$, $\forall g \in \mathrm{I}$, $\varphi(f, g) = 0$ et donc $f \in \mathrm{I}^{\perp}$. Par suite, $\mathsf{P} \subset \mathrm{I}^{\perp}$ et de même $\mathrm{I} \subset \mathsf{P}^{\perp}$. c) est vrai et d) est faux.

Question 31 :

a) VRAI
b) VRAI
c) VRAI
d) VRAI

Explication 31 : (erreur probable d'énoncé : tout est vrai)

a) Puisque $I \subset P^{\perp}$, $\forall g \in P$, $\varphi(f_i, g) = 0$. a) est vrai.

b) Puisque $P \subset I^{\perp}$, $\forall g \in I$, $\varphi(f_p, g) = 0$. b) est vrai.

c) $g = f_p \in P$ fournit $0 = \varphi(f, g) = \varphi(f_p + f_I, f_p) = \varphi(f_p, f_p) + \varphi(f_p, f_i) = \varphi(f_p, f_p)$ et donc $f_p = 0$ puis $f = f_i \in I$. c) est vrai.

d) Puisque $P^{\perp} = I$, la projection orthogonale sur P est la projection sur P parallèlement à I. La projection orthogonale sur P d'un élément de E est donc sa partie paire. d) est vrai.

Exercice 5

Question 32 :

a) VRAI
b) FAUX
c) FAUX
d) VRAI

Explication 32 :

a) L'application H est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ et son déterminant vaut $\beta - \alpha$. Par suite, H est un automorphisme si et seulement si $\alpha \neq \beta$. Dans ce cas, on sait alors que H et H^{-1} sont de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^2$. a) est vrai.

b) Si $\alpha \neq \beta$, $x = \dfrac{\beta u - \alpha v}{\beta - \alpha}$ et $y = \dfrac{-u + v}{\beta - \alpha}$ puis

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\beta \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Donc b) est faux.

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v}$$

Donc c) est faux.

d) Poursuivons. f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et d'après Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2},$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \alpha\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + \beta\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial v^2},$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial g}{\partial u} + \beta\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \alpha\left(\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right) + \beta\left(\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &+ b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= a\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + b\left(\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + c\left(\alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) \\
&= (a + b\alpha + c\alpha^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a + (\alpha+\beta)b + 2\alpha\beta c)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + (a + b\beta + c\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\
&= P(\alpha)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + K\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + P(\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

d) est vrai.

Question 33 :

a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) VRAI

Explication 33 :

a) $r_1 + r_2 = -\frac{b}{c}$ et $r_1 r_2 = \frac{a}{c}$. a) est faux.

b) On doit prendre pour α et β les racines r_1 et r_2 de P. Dans ce cas, $\alpha \neq \beta$ et les calculs précédents sont valides d'après 32.a). Pour ce choix de α et β, on a

$$K = 2a + b \times \left(-\frac{b}{c}\right) + 2c \times \frac{a}{c} = \frac{4ac - b^2}{c} \neq 0.$$

Donc b) est vrai.

c) α racine double $\Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Or K peut être nul sans que $P'(\alpha)$ ni $P'(\beta)$ ne le soient. Donc c) est faux.

d) De toute façon, d) est vrai d'après 32.d) et 33.b).

Question 34 :

a) FAUX
b) VRAI
c) VRAI
d) FAUX

Explication 34 :

a) et b) $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = 0$ montre que $\frac{\partial g}{\partial u}$ est constant quand v varie ou encore $\frac{\partial g}{\partial u}$ est une fonction de u uniquement. a) est faux et b) est vrai.

c) et d) Ainsi, $\frac{\partial g}{\partial u}$ est une fonction de u de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En intégrant de nouveau g est somme d'une fonction de u de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et d'une constante quand u varie c'est-à-dire une fonction de v, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Donc, il existe deux fonctions h_1 et h_2 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = h_1(u) + h_2(v)$. Réciproquement, une telle fonction g convient. c) est vrai et d) est faux.

Question 35 :
a) FAUX
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 35 :

a) On ne peut pas utiliser le changement de variables quand $\alpha = \beta$ car H n'est plus bijectif. Donc a) est faux.

b), c) et d) $r = -\dfrac{b}{2c}$. Maintenant, si $r = 0$ car alors $b = 0$ puis, comme $b^2 - 4ac = 0$, on obtient $ac = 0$ puis $a = 0$ car $c \neq 0$. Finalement $(a, b) = (0, 0)$ ce qui n'est pas. Donc, $r \neq 0$.

Avec $\alpha = r$ et $\beta = 0 \neq \alpha$, on obtient

$$K = 2a + b\left(-\frac{b}{2c} + 0\right) + 2c \times \left(-\frac{b}{2c}\right) \times 0 = \frac{4ac - b^2}{2c} = 0.$$

Donc, b) est vrai et c) et d) sont faux.

Question 36 :
a) VRAI
b) VRAI
c) FAUX
d) FAUX

Explication 36 :

a) et b) On choisit donc $\alpha = r$ et $\beta = 0$ ce qui est autorisé car $\alpha \neq \beta$. On a $P(\alpha) = K = 0$ et $P(\beta) \neq 0$. L'équation (E') s'écrit alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$. Mais en choisissant $\alpha = 0$ et $\beta = r$, l'équation (E') s'écrit $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$. Donc a) et b) sont vrais.

c) et d) c) et d) ne peuvent être que faux. Poursuivons néanmoins avec le choix $\alpha = r = -\dfrac{b}{2c}$ et $\beta = 0$ ou encore posons $u = x - \dfrac{b}{2c}y$ et $v = x$.

(E') s'écrit $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$. Donc, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ est constant quand v varie et est ainsi une fonction de u uniquement. En intégrant de nouveau, g s'écrit v fois cette fonction de u plus une constante quand v varie.
Il existe deux fonctions h_1 et h_2 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = vh_1(u) + h_2(u)$ ou encore $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xh_1(x + ry) + h_2(x + ry)$.

