

## 1 I,PRELIMINAIRE

Q1 Soit  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$   $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$  alors  $E_i^T A E_j = a_{i,j}$ , et  $E_i^T B E_j = b_{i,j}$  pour tout  $i$  et  $j$  dans  $[[0, 1]]$  donc  $A = B$  la réciproque est évidente.

Q2 On a  $M$  est inversible et  $M^T M$  est symétrique réelle donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles et non nulles; montrons quelles sont positives.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M^T M$  et  $X$  une valeur propre associée on a :  $X^T M^T M X = (M X)^T M X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 = \|M X\|^2 \geq 0$  ; or  $X$  non nul donc  $\lambda \geq 0$  or les valeurs propres de  $M^T M$  ne sont pas nulles donc elles sont strictement positives.

D'après le théorème spectral il existe  $P$  matrice orthogonale et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tel que :  $M M^T = P D P^T$  on pose  $R = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  et  $S = P R P^T$  alors on a bien  $S^2 = M M^T$ .

## 2 II OBJETS SYMPLECTIQUES, II.A Structure d'espace symplectique réel

Q3 Soit  $x$  dans  $E$  pour  $y = x$  on aura :  $\omega(x, x) = \omega(x, y) = -\omega(y, x) = -\omega(x, x)$  donc  $\omega(x, x) = 0$ .

Q4 Montrons que  $F^\omega$  est un sous espace vectoriel de  $E$ ; on a :  $F^\omega \subset E$  et non vide car  $0$  y appartient en effet :  $\omega(0, y) = \omega(0 + 0, y) = 2\omega(0, Y)$  pour tout  $y$  dans  $F$  donc  $\omega(0, y) = 0$

Soit  $x, y$  dans  $F^\omega$  et  $\alpha$  dans  $\mathbf{R}$ ; pour tout  $z$  dans  $E$  on a :  $\omega(\alpha x + y, z) = \alpha \omega(x, z) + \omega(y, z) = 0$  car  $x$  et  $y$  sont dans  $F^\omega$  alors  $\alpha x + y \in F^\omega$  donc  $F^\omega$  est un sous espace de  $E$ .

Q5 la réponse est non contre exemple le déterminant dans un espace de dimension 2.

Q6  $\omega$  est bilinéaire donc  $d_\omega$  est linéaire. Soit  $x$  dans  $E$ ;  $x$  est dans  $\text{Ker}(d_\omega) \iff \forall y \text{ élément de } E; \omega(x, y) = 0 \iff x = 0$   
donc  $\text{Ker}(d_\omega) = O$  donc  $d_\omega$  est injective en dimension finie donc bijective donc isomorphisme. ( $\dim(E) = \dim(L(E, R))$ ).

Q7 Une application linéaire sur  $E$  est bien définie par ses restrictions aux sous espaces formant une somme directe de  $E$ ; soit alors  $F$  un sous espace de  $E$  et  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  et soit  $l_1$  une application linéaire de  $F$  vers  $R$  et  $l_2$  l'application linéaire nulle de  $G$  vers  $R$  et soit  $l$  l'application linéaire de  $E$  vers  $R$  de restriction à  $F$  est égale à  $l_1$  et de restriction à  $G$  est égale à  $l_2$  on a bien  $r_F(l) = l_1$ .  
donc  $r_F$  est surjective. (remarque  $G$  existe car  $E$  est de dimension finie).

Q8 Soit  $x$  dans  $E$ ;  $x$  est un élément de  $\text{Ker}(r_F \circ d_\omega) \iff d_F \circ d_\omega(x) = 0$   
 $\iff \forall y \in F \quad \omega(x, y) = 0$   
 $\iff x \in F^\omega$   
Donc :  $\text{Ker}(r_F \circ d_\omega) = F^\omega$ .  
On a :  $r_F \circ d_\omega : E \mapsto L(F, R)$  est linéaire et surjective et d'après le théorème du rang on a :  
 $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(r_F \circ d_\omega)) + \dim(\text{Im}(r_F \circ d_\omega))$ .  
Donc  $\dim(E) = \dim(F^\omega) + \dim(L(F, R))$ .  
Donc  $\dim(F^\omega) = \dim(E) - \dim(L(F, R))$ .  
( $\dim(\text{Im}(r_F \circ d_\omega) = \dim(L(F, R)) = \dim(L(F, R))$ ).

Q9 On a :  $\dim(E) = \dim(F^\omega) + \dim(L(F, R))$ , il suffit alors de démontrer que  $F \cap F^\omega = 0$ .  
 $x \in F \cap F^\omega \iff \forall y \in F; \omega_F(x, y) = 0$   
 $\iff x = 0$ . (car  $\omega_F$  est non dégénérée). Donc :  $E = F^\omega \oplus F$ .

### 3 II B STRUCTURE SYMPLECTIQUES STANDARD SUR $\mathbf{R}^n$

Q10 Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  deux éléments de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  et  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes de  $x$  et  $y$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^n$

On a :  $\omega(x, y) = \omega(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \omega(e_i, e_j)$   
 $= X^T \Omega Y$ .

Q11  $\omega(e_j, e_i) = -\omega(e_i, e_j)$  pour tout i et j. Donc  $(\Omega)^T = -\Omega$  alors  $\Omega$  est antisymétrique.  $\Omega$  est inversible car  $\Omega X = 0 \iff \forall Y, Y^T \Omega X = 0 \iff \forall y \omega(y, x) = 0 \iff x = 0. \iff X = 0$ .

Q12 On a :  $\det(\Omega) = \det(\Omega)^T = \det(-\Omega) = (-1)^n \det(\Omega)$  donc  $(-1)^n = 1$  donc n est pair.

Q13 le produit scalaire sur  $\mathbf{R}^n$  est bilinéaire et j est linéaire donc  $b_s$  est bilinéaire.

Soient  $x = (x_1, \dots, x_{2m})$  et  $y = (y_1, \dots, y_{2m})$  deux éléments de  $\mathbf{R}^n$  On a :  $j(y) = (-y_{m+1}, \dots, -y_{2m}, y_1, \dots, y_m)$  et  $j(x) = (-x_{m+1}, \dots, -x_{2m}, x_1, \dots, x_m)$   
 Donc  $\langle x, j(y) \rangle = -\langle y, j(x) \rangle$  donc  $b_s$  est antisymétrique (Remarque J est antisymétrique donc  $b_s$  aussi)

le produit scalaire est non dégénéré et j est injective donc  $b_s$  est non dégénérée donc c est une forme symplectique sur  $\mathbf{R}^n$

### 3.1 II-C-Endomorphisme et matrices symplectiques réelles

Q14 Soient  $x \in E_\lambda(u)$  et  $y \in E_\mu(u)$ ; on a :  $\omega(x, y) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(\lambda x, \mu y) = \lambda \mu \omega(x, y)$  donc  $(1 - \lambda \mu) \omega(x, y) = 0$  donc  $\omega(x, y) = 0$  car  $\lambda \mu \neq 1$ . donc  $E_\lambda(u)$  et  $E_\mu(u)$  sont orthogonaux.

Q15 u est symplectique  $\iff \forall x, y \in \mathbf{R}^n$  on a :  $b_s(u(x), u(y)) = b_s(x, y)$   
 $\iff \langle u(x), j(u(y)) \rangle = \langle x, j(y) \rangle \iff (MX)^T JMY = X^T JY$   
 $\iff X^T M^T JMY = X^T JY$  pour tout X et Y donc  $M^T JM = J$  d après Q1.

Q16 Tout élément de  $Sp_n(\mathbf{R})$  est inversible (son déterminant n est pas nul) donc  $Sp_n(\mathbf{R})$  est une partie de  $GL_n(\mathbf{R})$  et  $I_n$  est dans  $Sp_n(\mathbf{R})$ . Soient M et N dans  $Sp_n(\mathbf{R})$ ; on a :  $(MN)^T JMN = N^T M^T JMN = N^T JN = J$  donc MN est dans  $Sp_n(\mathbf{R})$  et  $(M^{-1})^T JM^{-1} = (M^T JM)^T)^{-1} = (J^T)^{-1} = J$ . donc  $M^{-1}$  est dans  $Sp_n(\mathbf{R})$  donc  $Sp_n(\mathbf{R})$  est un sous groupe de  $GL_n(\mathbf{R})$ . de plus  $J^{-1} = J^T = -J$  donc si M est dans  $Sp_n(\mathbf{R})$  alors

$M^T J M = J \iff M^{-1} J^{-1} (M^{-1})^T = J^{-1} \iff (M^{-1})^T$  est dans  $Sp^n(R)$  donc son inverse aussi d'où la stabilité par transposition et on vérifie que  $J$  y appartient.

Q17  $M \in Sp_{2m}(R) \iff M^T J M = J$

$$\iff \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -I_m \\ I_m & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = J$$

$$\iff \begin{pmatrix} C^T A - A^T C & C^T B - A^T D \\ D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -I_m \\ I_m & O \end{pmatrix}.$$

$\iff$  par identification  $A^T C = C^T A, B^T D = D^T B$  et  $A^T D - C^T B = I_m$ .  
.CQFD.

### 3.2 III-Déterminant d une matrice symplectique réelle

Q18 Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  alors  $A \in Sp_2(R) \iff A^T J A = J$

$$\iff \begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff ad - bc = 1 \iff \det(A) = 1$$

$$\iff A \in SLG_2(R). \text{ Donc : } Sp_2(R) = SGL_2(R).$$

Q19 Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2m}(R)$  alors

$$M \in C_J \iff M J = J M \iff \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\iff B = -C \text{ et } D = A \text{ alors : } U=A=D \text{ et } V=B=-C; \text{ convient.}$$

- $M \in C_J$  donc elles existent  $U$  et  $V$  tel que  $M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$  et on a :

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant des deux membres on aura :  $\det(M) = \det(U + iV)\det(U - iV) = |\det(U + iV)|^2 \geq 0$ .

### 3.3 III-C-Décomposition polaire d une matrice symplectique réelle

Q21 On a :  $OS_p(R)$  est l intersection de deux sous groupes dans groupe et inclus dans  $Sp_n(R)$  donc c est un sous groupe de ce dernier ; c est aussi une partie de  $O_n(R)$  borné donc  $OS_p(R)$  est borné de plus c est l intersection de deux fermés donc  $OS_p(R)$  est fermé donc compact (fermé borné d un espace de dimension finie).

Q22 Si M est dans  $OS_p(R)$  alors M est une matrice orthogonale donc  $M^T = M^{-1}$  or  $MJM^T = J$  donc en multipliant à gauche par M on aura  $MJ=JM$  donc  $M \in C_J$   
donc :  $OS_p(R) \in C_J$ .

( $O_n$  est fermé car compact et  $Sp_n(R) = \phi^{-1}(J)$  est fermé car  $\phi : M \in M_n(R) \mapsto M^T JM$  est continue.

Q23 Soit  $M \in OS_p(R)$  alors  $M \in Sp_n(R)$  et  $M \in O_n(R)$  donc  $|\det(M)|=1$  et  $\det(M) \geq 0$  donc  $\det(M)=1$ .

Q24 On a S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthogonale et on a ses valeurs propres sont strictement positives remarquons que si  $\lambda$  est valeur propre de S alors  $\frac{1}{\lambda}$  aussi car si X est un vecteur propre associé alors :  $MJX = MJ(\frac{1}{\lambda}MX) = \frac{1}{\lambda}JX$  or  $JX$  non nul car J inversible et on a :  $\lambda$  et  $\frac{1}{\lambda}$  ont même ordre de multiplicité Soit alors  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2m}$  base orthonormale associés aux valeurs propres tel que :  $e_i$  est associé à  $\lambda_i$  pour i entre 1 et m et  $e_{m+i}$  associé à  $\frac{1}{\lambda_i} = \lambda_{m+i}$

Soient  $x = \sum_1^{2m} x_i e_i$  et  $y = \sum_1^{2m} y_i e_i$  alors :

$$b_s(s(x), s(y)) = \langle s(x), j(s(y)) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{2m} \lambda_i x_i e_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j e_{m+j} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} y_{m+j} e_j \rangle$$

$$= - \sum_{i=1}^m \lambda_i \lambda_m + i x_i y_{m+i} + \sum_{i=1}^m \lambda_m + i \lambda_i x_{m+i} y_i.$$

$$= - \sum_{i=1}^m i = 1^m x_i y_{m+i} + \sum_{i=1}^m x_{m+i} y_i.$$

$$= \langle x, j(y) \rangle. \text{ donc s est symplectique.}$$

Q25 On a :  $S^2 = M^T M$  et M inversible donc S inversible

$$(\det(S^2) = \det(M)^2 \neq 0).$$

On a : S symplectique donc  $S^{-1}$  aussi or M symplectique donc  $MS^{-1}$  est symplectique montrons quel est orthogonal :

On a :  $O^T O = (MS^{-1})^T MS^{-1} = S^{-1} S S S^{-1} = I_{2m}$  donc O est orthogonale or elle est symplectique donc appartient à  $OS_p(R)$ .

Q26 D après Q23  $\det(O)=1$  et  $\det(S^2) = \det(M^T M) = (\det(M))^2 = 1$  donc  $\det(M) = \det(OS) = \det(O)\det(S) = 1$  ( $\det(S) \geq 0$ ) donc  $\det(M)=1$ .

### 3.4 III-D-transvection symplectique

Q27 Soit  $a$  un élément de  $E$  non nul alors  $x \mapsto \lambda\omega(x, a)$  est une forme linéaire de  $E$  tel que  $a$  est dans son Ker donc  $\tau_a^\lambda x \mapsto x + \lambda\omega(x, a)a$  est une transvection de  $E$ .

pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$   $\omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) = \omega(x, y)$  (par bilinéarité de  $\omega$  et  $\omega(a, a) = 0$ ). donc  $\tau_a^\lambda$  est un endomorphisme symplectique de  $E$ .

Q28 pour tout  $x$  dans  $E$  on a :  $\tau_a^\mu(\tau_a^\lambda(x)) = \tau_a^\mu(x + \lambda\omega(a, x)a)$   
 $= x + (\lambda + \mu)\omega(a, x)a = \tau_a^{\lambda+\mu}(x)$  d où le résultat.

Q29 on a  $\tau_a^\lambda$  bijective donc son déterminant est non nul  
 or  $\det(\tau_a^\lambda) = (\det(\tau_a^{\frac{\lambda}{2}}))^2 \geq 0$ . et conclure.

Q30 Daprès Q29 on a :  $(\tau_a^\lambda)^{-1} = \tau_a^{-\lambda}$  c est bien donc une transposition symplectique.

Q31 Si  $\lambda$  existe alors  $x + \lambda\omega(y - x, x)(y - x) = y$  donc  $x + \lambda\omega(y, x)y - \lambda\omega(y, x)x = y$  donc  $\lambda = \frac{1}{\omega(x, y)}$  et ce  $\lambda$  convient.

Q32 soient  $x$  et  $y$  non nuls dans  $E$  tel que  $\omega(x, y) = 0$  soient  $H = (\text{vect}(x))^\omega$  et  $K = (\text{vect}(y))^\omega$  l orthogonal de  $x$  respectivement de  $y$ . D après Q8  $H$  et  $K$  sont deux hyperplans

Si  $H=K$  alors tout élément  $z$  de  $E$  qui n appartient pas à  $H$  convient  
 Si  $H \neq K$  il existe  $z_1$  dans  $H$  n appartenant pas à  $K$  et  $z_2$  dans  $K$  qui n appartient pas à  $H$  alors  $z = z_1 + z_2$  convient.

Q33 On a :  $\omega(x, z) \neq 0$  et  $\omega(y, z) \neq 0$  donc d après Q31 il existe  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tels que  $\tau_1(x) = z$  et  $\tau_2(z) = y$  donc  $\tau_2 \circ \tau_1$  convient.

### 3.5 III-D-3 Le théorème

Q34  $e_1$  non nul et  $\omega$  non dégénérée donc il existe  $f$  dans  $E$  tel que  $\omega(e_1, f) \neq 0$   
alors  $f_1 = \frac{f}{\omega(e_1, f)}$  convient.

Q35 on a  $e_1$  non nul et  $u$  bijective donc  $u(e_1)$  non nul donc  $d$  après le lemme  $\delta_1$  existe.

Q36  $\tilde{f} = \delta_1(u(f))$  et  $\omega(e_1, f) = 1$  et  $\delta_1 \circ u$  symplectique donc :  
 $\omega(e_1, \tilde{f}) = \omega(\delta_1(u(e_1)), \delta_1(u(f_1))) = \omega(e_1, f_1) = 1$   
 Si  $b = \omega(\tilde{f}, f_1) \neq 0$  alors  $\delta_2 : v \mapsto v + b\omega(v, f_1 - \tilde{f})(f_1 - \tilde{f})$  vérifie  
 $\delta_2(e_1) = e_1$  et  $\delta_2(\tilde{f}) = f_1$   
 Si  $\omega(\tilde{f}, f_1) = 0$  on pose  $g = e_1 + \tilde{f}$  alors  $\omega(e_1, g) = 1$  et  $\omega(\tilde{f}, g) = -1$   
 à vérifier alors  $d$  après le premier cas il existe  $\delta_1$  tel que  $\delta_1(e_1) = e_1$   
 et  $\delta_1(\tilde{f}) = g$  or  $\omega(g, f_1) = \omega(e_1, f_1) = 1$  donc il existe  $\delta_2$  tel que  
 $\delta_2(g) = f_1$  alors  $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$  vérifie :  $\delta(u(e_1)) = e_1$  et  $\delta(u(f)) = f_1$ .

Q37 on a :  $v(e_1) = \delta(u(e_1)) = e_1$  et  $v(f_1) = \delta(u(f_1)) = f_1$  donc  $P$  est stable  
par  $v$ .

Q38 Soit  $x \in P^\omega$  puisque  $v$  est un endomorphisme symplectique alors :  
 $\omega(v(x), e_1) = \omega(v(x), v(e_1)) = \omega(x, e_1) = 0$  de même  $\omega(v(x), f_1) = 0$   
 donc  $v(x) \in P^\omega$  donc  $P^\omega$  est stable par  $v$ .

Q39 D'après Q8 il suffit de démontrer que  $E = P \oplus P^T$ .  
 on a déjà  $\dim(E) = \dim(P) + \dim(P^\omega)$  montrons que  $P^\omega \cap P = O$ .  
 Soit  $x \in P \cap P^\omega$  alors il existe  $\lambda; \beta; x = \lambda e_1 + \beta f_1$  tel que  $\omega(x, e_1) =$   
 $\omega(x, f_1) = 0$ . alors  $\lambda = 0 = \beta$  donc  $x = 0$ . et  $d$  après Q9  $\omega$  induit  
 sur  $P^\omega \times P^\omega$  une structure d'espace symplectique et  $v$  induit sur  $P^\omega$  un  
 endomorphisme symplectique.

Q40 Démontrons le théorème énoncé par récurrence sur.  
 pour  $m=1$  vraie  $d$  après Q36.  
 supposons le théorème vrai pour un entier  $m$  et soit  $u$  un endomor-  
 phisme symplectique  $d$  un espace  $E$  de dimension  $2(m+1)$   
 soient  $e_1$  et  $f_1$  et  $P = \text{vect}(e_1, f_1)$  comme dans la question Q36 Soit  $\delta_2$   
 comme dans Q36 et  $v = \delta_2 \circ u$ .

Alors  $v$  induit sur  $P$  et sur  $P^\omega$  des endomorphismes symplectiques  $v_P$   $v_{P^\omega}$  et d'après l'hypothèse de récurrence :  $v_P$  est composé d'au plus 4 transvections symplectiques ; et  $v_{P^\omega}$  est composé d'au plus  $4m$  transvections symplectiques. or  $u = \delta_2^{-1}$  donc  $u$  est composé d'au plus  $4m+4=4(m+1)$  transvections symplectiques.

### 3.6 III-D-4- Une conséquence topologique

Q41 Pour montrer que  $Sp_n(\mathbb{R})$  est connexe par arc il suffit de démontrer que  $Symp_\omega(\mathbb{R}^n)$  est connexe par arcs ou tout simplement que cet ensemble est étoilé en  $id$  / soit  $u \in Symp_\omega(\mathbb{R}^n)$  alors  $u$  est composé d'au plus  $2n$  transvections symplectiques,  $u = \tau_a^{\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i}$  ou  $a$  est un élément de  $\mathbb{E}$  non nul, et les  $\lambda_i$  des réels.

Soit alors  $\delta : [0, 1] \mapsto Symp_\omega(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\delta(t) = \tau_a^{\sum_{i=1}^{2n} t \lambda_i}$  on a bien  $\delta$  est continue,  $\delta(0) = id$  et  $\delta(1) = u$  donc  $Symp_\omega(\mathbb{R}^n)$  est étoilé en  $id$  donc  $Sp_n(\mathbb{R})$  est étoilé en  $I_n$  donc connexe par arcs.

Q42 Tout élément  $u$  de  $Sp_n(\mathbb{R}^n)$  est composé d'un nombre fini de transvections symplectique et chaque transvection et de déterminant égale à 1 donc  $\det(u)=1$  donc  $Sp_n(\mathbb{R}^n) \subset SL_n(\mathbb{R})$ .

### 3.7 IV-Exemple de problème de prolongement symplectique linéaire

Q43 Soit  $r$  strictement positif et  $u \in SL(\mathbb{R}^{2n})$  de matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$  est  $diag(r, \frac{1}{r}, 1, \dots, 1, r, \frac{1}{r}, 1, \dots, 1)$   $x=(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$  un élément de  $B^{2m}(1)$  on a :

$$u(x) = (rx_1, \frac{1}{r}x_2, x_3, \dots, x_m, ry_1, \frac{1}{r}y_2, y_3, \dots, y_m) \text{ et on a } (rx_1)^2 + (ry_1)^2 \leq r^2 \sum_{i=1}^m (x_i)^2 \leq r^2. \text{ donc } u(x) \in Z^{2m}(r)$$

Donc  $u(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r)$ .

Q44 Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $U$  et  $X$  élément de  $B^{2m}(1)$  de composantes  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$  Alors  $UX$  a pour composantes  $(\lambda x_1, \dots, \lambda y_m)$   $\|UX\|^2 \leq r^2$  donc  $\lambda^2 \sum_{i=1}^m (x_i)^2 + (y_i)^2 \leq r^2$  donc quitte à remplacer  $X$  par  $\frac{X}{\|X\|}$  on peut supposer  $X$  unitaire alors  $(\lambda)^2 \leq r^2$  donc  $|\lambda| \leq r$

Cas où  $\lambda$  est une valeur propre complexe de  $U$  et  $Z = P+iQ$  vecteur propre unitaire associé on a :  $\|UZ\| \leq r^2$ .

or  $\|UZ\|^2 = \|\lambda(P+iQ)\|^2 = |\lambda|^2(\|P\|^2 + \|Q\|^2) = |\lambda|^2\|Z\|^2 = |\lambda|^2 \leq r^2$   
 Donc  $|\lambda| \leq r$ .

Q45 Si  $U \in SL(\mathbb{R}^{2n})$  alors  $\det(U)=1$  donc  $U$  admet une valeur propre supérieure ou égale à 1 donc  $r \geq 1$ .

Q46 D'après Q43 et Q45 la condition nécessaire et suffisante sur  $r$  pour que  $U(B^{2n}(1)) \subset Z^{2n}(r)$  est  $1 \leq r$ .

### 3.8 IV-C-Injection symplectique d'une boule dans un cylindre

Q47 Soit  $r > 0$  et soit  $\psi \in \text{Symplect}_b(\mathbb{R}^{2m})$  vérifiant :  $\psi(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r)$ .  
 Donc avec les notations des hypothèses  $|b_s(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1))| = |b_s(e_1, f_1)| = |\langle e_1, j(f_1) \rangle| = 1$  or  $|b_s(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1))| \leq \|\psi(e_1)\| \|\psi(f_1)\|$   
 donc  $\|\psi(e_1)\| \geq 1$  ou  $\|\psi(f_1)\| \geq 1$  d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz.

Q48 D'après Q47 on a :  $e_1 \in B^{2m}(1)$  et  $\psi(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r)$  .  
 donc  $1 \leq \|\psi(e_1)\| \leq r$ .

Q49 Soit  $R$  et  $R'$  deux réels strictement positifs alors il existe  $\psi \in \text{Symplect}_b(\mathbb{R}^{2m})$  tel que  $\psi(B^{2m}(R)) \subset Z^{2m}(R')$  si et seulement si : il existe  $\psi \in \text{Symplect}_b(\mathbb{R}^{2m})$  tel que :  $\psi(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(\frac{R'}{R})$  si et seulement si :  $\frac{R'}{R} \geq 1$  c'est à dire  $R \leq R'$ .