Concours d'entrée à l'ENSAI 2000
Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques

PARTIE I

1. Notons g l'application $t \longmapsto \dfrac{tf(t)}{x^2+t^2}$. On a :

- g est définie et continue sur $]0,+\infty[$;
- $g(t) = O\left(tf(t)\right)$ au voisinage de 0 et $t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $]0,1]$;
- $g(t) \sim f(t)/t$ en $+\infty$ et $t \longmapsto f(t)/t$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On en déduit donc que g est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2.a. Comme $f_1(t)/t$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{1}{t\ln t}$ qui n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$ (une primitive de $\dfrac{1}{t\ln t}$ est $\ln\ln t$ qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$), f_1 n'est pas élément de E.

2.b. Par contre, f_2 est élément de E puisque :

- f_2 est définie et continue sur $]0,+\infty[$;
- $tf_2(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ;
- $f_2(t)/t = O(t^{-3/2})$ au voisinage de $+\infty$, et $t \longmapsto t^{-3/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

3.a. f est clairement définie et continue sur $]0,+\infty[$. D'autre part, $tf(t)$ tend vers 1 quand t tend vers 0 et $f(t)/t$ est un grand O de $1/t^3$ au voisinage de $+\infty$. f est donc élément de E.

On a ensuite, pour tout $x>0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(x^2+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xu)}{u(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

en effectuant le changement de variable $t = xu$.

3.b. Fixons $A>0$ et notons g l'application qui à tout couple (x,t) de $D = [0,A]\times\mathbb{R}_+^*$ associe $\dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$. Alors :

- g est continue sur son domaine de définition D ;
- g est dérivable par rapport x sur D et l'application $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{((1+t^2)(1+x^2t^2)}$ est continue sur D ;
- $\forall (x,t)\in D,\ |g(x,t)| \leq \dfrac{xt}{t(1+t^2)} \leq \dfrac{A}{1+t^2} = \phi(t)$ et l'application ϕ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$;
- $\forall (x,t)\in D,\ |\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \psi(t)$ et l'application ψ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de Leibniz, on peut affirmer que G est définie et de classe C^1 sur chaque intervalle $[0, A]$, donc sur $\mathbb{R}_+$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

3.c. Soit $x \geq 0$ avec $x \neq 1$. Comme $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{x^2-1}\dfrac{1}{1+x^2t^2} - \dfrac{1}{x^2-1}\dfrac{1}{1+t^2}$ (décomposition en éléments simples), on obtient, en remarquant que les deux intégrales convergent :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2(x+1)}. \end{aligned}$$

Par continuité de G, cette égalité est également valable pour $x = 1$.

3.d. On en déduit donc que $G(x) = G(0) + \displaystyle\int_0^x G'(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$ pour tout $x \geq 0$, puis que

$$F(x) = \frac{\pi\ln(x+1)}{2x^2}$$

pour tout $x > 0$.

3.e. La fonction considérée est continue sur $]0, +\infty[$, a une limite finie en 0 et est un $O(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. Elle est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour $\varepsilon > 0$ et $A\varepsilon$, nous avons :

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{Arctan}^2\,t}{t}\right]_\varepsilon^A + 2\int_\varepsilon^A \frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

en intégrant par parties. En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2F(1) = \pi\ln 2.$$

4.a. f est continue sur $]0, +\infty[$, $tf(t)$ a une limite finie en 0 et $f(t)/t$ est un $O(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. L'application f est donc élément de E.

4.b. Pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$\varphi(1/n) = \frac{F(1/n)}{n} = n\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

en effectuant le changement de variable proposé par l'énoncé. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

- pour tout $n \geq 1$, $\psi_n : t \longmapsto \dfrac{\cos(t/n)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \geq 0$, $\psi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1+t^2}$;

- pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \geq 0$, $|\psi_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$;
- l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

On peut donc affirmer que $\varphi(1/n)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi/2$ quand n tend vers $+\infty$.

4.c. En posant $t = ux$, on obtient $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, puis $|\varphi(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi/2$ pour tout $x > 0$.

4.d. On a [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = -\frac{2tx}{(x^2+t^2)^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{8tx^2}{(x^2+t^2)^3}, -\frac{2t}{(x^2+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{1}{x^2+t^2} - \frac{2t^2}{(x^2+t^2)^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{8t^3}{(x^2+t^2)^3} - \frac{6t}{(x^2+t^2)^2}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = -\frac{8t}{(x^2+t^2)^2} + \frac{8t^3}{(x^2+t^2)^3} + \frac{8tx^2}{(x^2+t^2)^3} = 8\,\frac{-t(x^2+t^2)+t^3+tx^2}{(x^2+t^2)^3} = 0.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $A > \varepsilon$. On peut appliquer deux fois le théorème de Leibniz à l'application φ sur l'intervalle $[\varepsilon, A]$:

- l'application $\psi : (x,t) \longmapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}\cos t$ est continue et deux fois dérivable par rapport à x sur $[\varepsilon, A] \times [0, +\infty[$;
- les applications $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ sont continues sur $[\varepsilon, A] \times [0, +\infty[$;
- $\forall (x,t) \in [\varepsilon, A] \times [0, +\infty[$, on a les propriétés de dominations :

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{\cos t}{x^2+t^2} - 2\frac{x^2\cos t}{(x^2+t^2)^2}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2+t^2} + 2\frac{A^2}{(\varepsilon^2+t^2)^2} = \psi_1(t)$$

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|-6\frac{x\cos t}{(x^2+t^2)^2} + 8\frac{x^3\cos t}{(x^2+t^2)^3}\right| \leq 6\frac{A}{(\varepsilon^2+t^2)^2} + 8\frac{A^3}{(\varepsilon^2+t^2)^3} = \psi_2(t)$$

  où ψ_1 et ψ_2 sont continues et intégrables sur $[0, +\infty[$.

Ainsi φ est de classe C^2 sur chaque intervalle $[\varepsilon, A]$, donc sur $]0, +\infty[$, avec pour tout $x > 0$:

$$\phi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,\mathrm{d}t,$$

$$\phi"(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

[1] L'énoncé est correct mais maladroit, puisque l'on aura besoin de l'identité (symétrique)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = 0$$

dans la suite de la question.

En intégrant deux fois par partie, nous obtenons ensuite, pour tous $A > 0$ et $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,\mathrm{d}t &= -\int_0^A \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t\right]_0^A - \int_0^A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\cos t - \frac{x}{x^2+t^2}\sin t\right]_0^A + \int_0^A \frac{x}{x^2+t^2}\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-2\frac{tx}{(x^2+t^2)^2}\cos t - \frac{x}{x^2+t^2}\sin t\right]_0^A + \int_0^A \frac{x}{x^2+t^2}\sin t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

soit $\phi"(x) = \phi(x)$ en faisant tendre A vers $+\infty$.

4.e. Il existe donc deux réels α et β tels que $\phi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ pour tout $x > 0$. Comme ϕ est bornée sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\alpha = 0$. La propriété $\phi(1/n) \to \pi/2$ donne enfin $\beta = \pi/2$, soit :

$$\phi(x) = \frac{\pi}{2}\,e^{-x},\ F(x) = \frac{\pi}{2x}\,e^{-x}$$

pour tout $x > 0$.

PARTIE II

1. On $u_k \geq \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{(k+1)T}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)T}$ en appelant A la constante $\int_{kT}^{(k+1)T} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Comme f est non nulle, A est non nulle et la série de terme générale u_k est divergente, par comparaison à la série harmonique.

2. On en déduit donc que la fonction $f(t)/t$ n'est pas intégrable [2] sur $[1, +\infty[$, puisque

$$\int_1^n \frac{|f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

f n'est donc pas élément de E.

3. Pour $y > T$, notons $k(y)$ l'unique entier $k \geq 1$ vérifiant $kT \leq y < (k+1)T$. Nous avons $k(y)T \sim y$ au voisinage de $+\infty$ et

$$h(y) = \int_0^{k(y)T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{k(y)T}^y f(t)\,\mathrm{d}t = k(y)\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{k(y)T}^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\left|\int_{k(y)T}^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (y - k(y)T)\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq T\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $k(y)\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = k(y)Tm$ tend vers plus ou moins l'infini quand y tend vers $+\infty$ (m est non nul). On en déduit donc que $h(y)$ est équivalent à $k(y)Tm$, i.e. à my quand y tend vers $+\infty$.

4. En intégrant par partie, nous obtenons pour tous $x > 0$ et $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{x^2+t^2}\,h(t)\right]_0^A - \int_0^A \left(\frac{1}{x^2+t^2} - 2\frac{t^2}{(x^2+t^2)^2}\right)h(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (1)$$

[2] L'énoncé utilise la "bonne" définition d'intégrabilité (i.e. celle du programme!), une fonction étant dite intégrable sur un intervalle quelconque si et seulement si elle est "absolument intégrable" au sens de l'ancien programme.

Comme $h(t) \sim mt$ au voisinage de $+\infty$, le premier terme $\left[\dfrac{t}{x^2+t^2}\,h(t)\right]_0^A$ tend vers m quand A tend vers $+\infty$. D'autre part :

$$\left(\frac{1}{x^2+t^2} - 2\frac{t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) h(t) \sim -\frac{m}{t}$$

au voisinage de $+\infty$. Par comparaison des intégrales impropres de fonctions de signe constant, on en déduit que $\displaystyle\int_0^A \left(\frac{1}{x^2+t^2} - 2\frac{t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) h(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ si $m<0$ et vers $-\infty$ si $m>0$. Ainsi $\displaystyle\int_0^A \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ n'a pas de limite (finie) quand A tend vers $+\infty$.

5. Si $m=0$, le calcul fait à la question 3 montre que h est bornée. On a maintenant :

$$\left(\frac{1}{x^2+t^2} - 2\frac{t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) h(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

au voisinage de l'infini, et la fonction $t \longmapsto \left(\dfrac{1}{x^2+t^2} - 2\dfrac{t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) h(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Comme d'autre part $\left[\dfrac{t}{x^2+t^2}\,h(t)\right]_0^A \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$, on en déduit que la limite étudiée existe.

PARTIE III

1. On décompose la fraction en éléments simples : $\dfrac{t}{x^2+t^2} = \dfrac{t}{(x-it)(x+it)} = \dfrac{\alpha}{x-it} + \dfrac{\beta}{x+it}$ avec

$$\alpha = \frac{t}{it+it} = -\frac{i}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \overline{\alpha} = \frac{i}{2}.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \alpha\,\frac{(-1)^k k!}{(x-it)^{k+1}} + \beta\,\frac{(-1)^k k!}{(x+it)^{k+1}}$$

puis que

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \le \frac{k!}{2}\left(\frac{1}{|x-it|^{k+1}} + \frac{1}{|x+it|^{k+1}}\right) = \frac{k!}{(x^2+t^2)^{\frac{(k+1)}{2}}}$$

pour tous $(x,t) \neq (0,0)$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Nous allons montrer que F est C^∞ en appliquant par récurrence le théorème de Leibniz. Toutefois, la majoration obtenue à la question précédente ne permet pas d'étudier l'intégrale "au voisinage de 0", puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}\,f(t)$ n'est pas en général intégrable sur $]0,1]$. L'énoncé est maladroit, la fonction Φ définie au début de la partie IV nous étant très utile ici !

a) Étude de $\Phi\ :\ x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons H_k la propriété de récurrence :

$$\Phi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } \forall x \ge 0,\ \Phi^{(k)}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (H_k)$$

La propriété (H_0) est vérifiée :

- l'application $(x,t) \longmapsto \dfrac{t}{x^2+t^2}\,f(t)$ est définie et continue sur $[0,+\infty[\times[1,+\infty[$;

- $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[1,+\infty[,\ \left|\dfrac{t}{x^2+t^2}\, f(t)\right| \leq \dfrac{|f(t)|}{t} = \psi(t)\,;$
- l'application ψ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$.

On peut donc affirmer que Φ est continue sur $[0,+\infty[$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ et supposons que H_k soit vérifiée. On a alors :

- l'application $\varphi\,:(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)$ est définie et continue sur $[0,+\infty[\times[1,+\infty[$;
- $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[1,+\infty[,\ |\varphi(x,t)| \leq \dfrac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}\,|f(t)| \leq \dfrac{k!}{t^{(k+1)}}\,|f(t)| = \psi(t)\,;$
- l'application ψ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$;
- φ est dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ est continue sur $[0,+\infty[\times[1,+\infty[$;
- $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[1,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+2)/2}}\,|f(t)| \leq \dfrac{k!}{t^{(k+2)}}\,|f(t)| = \psi_1(t)\,;$
- l'application ψ_1 est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral : la propriété (H_{k+1}) est vérifiée.

Nous avons ainsi montré par récurrence que Φ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$, avec

$$\Phi^{(k)}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $(k,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Étude de $\Psi\ :\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}\, f(t)\,\mathrm{d}t$.
Commençons par remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right) = \frac{P_k(x,t)}{(x^2+t^2)^{k+1}}$$

où P_k est un polynôme à deux variables. En notant Q_k le polynôme obtenu en remplaçant tous les coefficients de P_k par leur valeur absolue, nous avons donc :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{Q_k(x,t)}{(x^2+t^2)^{k+1}}\, t$$

pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, où Q_k est un polynôme à coefficients positifs.

Fixons $\varepsilon > 0$ et $A > \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons H'_k la propriété de récurrence :

$$\Psi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } [\varepsilon, A] \text{ et } \forall x \in [\varepsilon, A],\ \Psi^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (H'_k).$$

La propriété (H'_0) est vérifiée :

- l'application $(x,t) \longmapsto \dfrac{t}{x^2+t^2}\, f(t)$ est définie et continue sur $[\varepsilon, A]\times]0,1]$;
- $\forall (x,t) \in [\varepsilon, A] \times [1,+\infty[,\ \left|\dfrac{t}{x^2+t^2}\, f(t)\right| \leq \dfrac{t}{\varepsilon^2+t^2}\,|f(t)| = \psi(t)\,;$

- l'application ψ est continue et intégrable sur $]0,1]$.

On peut donc affirmer que Ψ est continue sur $[\varepsilon, A]$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ et supposons que H'_k soit vérifiée. On a alors :

- l'application $\varphi : (x,t) \longmapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)$ est définie et continue sur $[\varepsilon, A] \times [1, +\infty[$;
- $\forall (x,t) \in [\varepsilon, A] \times [1,+\infty[,\ |\varphi(x,t)| \leq \dfrac{Q_k(x,t)}{(x^2+t^2)^{k+1}}\,|tf(t)| \leq \dfrac{Q_k(A,t)}{(\varepsilon^2+t^2)^{k+1}}\,|tf(t)| = \psi(t)$;
- l'application ψ est continue et intégrable sur $]0,1]$, puisque $\psi(t) = O(tf(t))$ au voisinage de 0 ;
- φ est dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ est continue sur $[\varepsilon, A]\times]0,1]$;
- $\forall (x,t) \in [\varepsilon, A]\times]0,1],\ \left|\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{Q_{k+1}(A,t)}{(\varepsilon^2+t^2)^{k+2}}\,|f(t)| = \psi_1(t)$;
- l'application ψ_1 est continue et intégrable sur $]0,1]$ (même raison que pour ψ).

Le théorème de Leibniz s'applique donc une nouvelle fois : la propriété (H_{k+1}) est vérifiée.

Nous avons ainsi montré que Ψ est de classe C^∞ sur chaque intervalle $[\varepsilon, A]$, donc sur $]0,+\infty[$, avec

$$\Psi^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $(k,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$, ce qui achève la démonstration.

PARTIE IV

1. Voir la question précédente.

2. On a $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t + \Phi(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x)$.

Montrons que la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0,1/2]$. Pour appliquer le théorème de continuité, nous allons couper l'intégrale en deux morceaux, afin de dominer plus facilement la fonction intégrée.

a) l'application $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{1/2}^1 \ln(x^2+t^2)f'(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0,1/2]$ car l'application $(x,t) \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)f'(t)$ est définie et continue sur $[0,1/2]\times[1/2,1]$.

b) l'application $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{1/2} \ln(x^2+t^2)f'(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0,1/2]$ car :

- l'application $(x,t) \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)f'(t)$ est définie et continue sur $[0,1/2]\times]0,1/2]$;
- $\forall (x,t) \in [0,1/2]\times]0,1/2],\ \left|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+t^2)f'(t)\right| = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+t^2)|f'(t)| \leq -\ln t\,|f'(t)| = \psi(t)$;
- ψ est continue et intégrable sur $]0,1]$, puisque $\psi(t) = O(\ln t)$ au voisinage de 0.

Nous obtenons donc le développement asymptotique au voisinage de 0 :

$$F(x) = -f(0)\ln x + \Phi(0) - \int_0^1 \ln t\, f'(t)\,\mathrm{d}t + o(1),$$

et donc $F(x) \sim -f(0)\ln x$ au voisinage de 0 (car $f(0)$ est non nul).

3.a. Pour $x > 0$, on obtient par le changement de variable $t = ux$:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/x} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{Arctan}(1/x).$$

3.b. Pour tout $x > 0$, on a $xF(x) = x\,\Phi(x) + \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. Comme Φ est continue en 0, $x\,\Phi(x) + \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = x\Phi(x) + \mathrm{Arctan}(1/x)$ tend vers $\pi/2$ quand x tend vers 0. Il reste donc à montrer que $R(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0, ce qui se fait par une preuve "de type Cesaro".

Soit $\varepsilon > 0$ et fixons $\eta \in]0,1[$ tel que $|tf(t)-1| \leq \varepsilon$ dès que $0 < t \leq \eta$. On a donc :

$$\begin{aligned}
|R(x)| &\leq \left|\int_0^\eta \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \varepsilon \int_0^\eta \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t + \left|\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \varepsilon \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t + \left|\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \varepsilon\,\mathrm{Arctan}(1/x) + \left|\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{\pi}{2}\,\varepsilon + \left|\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

Enfin, $(x,t) \longmapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)$ étant continue sur $[0,+\infty[\times[\eta,1]$, $x \longmapsto \displaystyle\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,+\infty[$. Nous en déduisons que $\displaystyle\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Il existe donc $a > 0$ tel que $\left|\displaystyle\int_\eta^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,(tf(t)-1)\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in]0,a]$. Nous obtenons donc :

$$|R(x)| \leq \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\varepsilon$$

pour tout $x \in]0,a]$, ce qui traduit la convergence de $R(x)$ vers 0 quand x tend vers 0.

FICHE D'ÉVALUATION DES SUJETS DE CONCOURS

Libellé complet de l'épreuve : **ENSAI option MP, deuxième épreuve de Mathématiques**

Nom : LEGROS Stéphane, professeur de la MP du lycée Pierre CORNEILLE de Rouen
Adresse : 5, rue de la Briqueterie 76 130 Mt St Aignan
Tel : 02 35 74 91 63

Titre proposé pour l'épreuve : Autour de la transformation $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

ÉVALUATION

I. Erreurs d'énoncé - influence des calculatrices

Il n'y a pas d'erreurs d'énoncé à proprement parler, mais on trouve deux grosses maladresses :

1. À la question I.4.d., on demande de montrer que la fonction $(t,x) \longmapsto \dfrac{t}{x^2+t^2}$ est harmonique, alors qu'il faut utiliser ensuite la fonction $(t,x) \longmapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. C'est d'autant plus ennuyeux qu'il est possible de faire apparaître $\dfrac{t}{x^2+t^2}$, et de se lancer dans une mauvaise voie.
2. À la question III.2., on veut montrer que l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. La majoration demandée à la question 1) ne permet que de traiter, via le théorème de dérivation de Leibniz, l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$, qui n'est pourtant définie qu'au début de la partie IV. Cela a sans doute posé des problèmes aux élèves, d'autant que jusque là, l'énoncé donnait toutes les indications avec précision.

Les calculatrices étaient interdites.

II. Conformité au programme

Aucune question n'est hors programme. Il est même intéressant de remarquer que l'énoncé utilise la définition correcte (au sens du nouveau programme) de l'intégrabilité sur un intervalle quelconque (fonction sommable).

L'esprit du programme est également respecté, les méthodes "classiques" étant même explicitées par l'énoncé. Une bonne connaissance du cours permettait de traiter sans problème les parties I et II.

Par contre, le cours d'analyse n'est que partiellement couvert : intégrabilité sur $]0,+\infty[$, fonction dépendant d'un paramètre (th. de continuité et de dérivation), th. de convergence dominée, intégrations par parties et changements de variables.

Qualités qui me semblent le plus testées :

- les quelques th. cités ci-dessus doivent être parfaitement connus ;
- le pb est assez technique, mais l'énoncé explicite toujours (au moins dans les 3/4 du sujet) la marche à suivre ;
- pas de difficulté de modélisation, d'imagination ou de choix de méthode.

Originalité du sujet : aucune ; on a plutôt l'impression de résoudre une suite d'exercices d'oral "classiques".

Intérêt mathématique du sujet : bonne révision du cours sur les intégrales dépendant d'un paramètre, mais on n'apprend rien de général dans ce problème.

III. Tri, Niveau de difficulté

Longueur du sujet : les parties I et II sont un peu longues et laissent peu de temps pour attaquer les questions plus délicates (III.2., IV.2. et IV.3.).

Difficulté et caractère progressif : les deux premières parties sont faciles mais un peu laborieuses. La première question délicate est très mal introduite par l'inégalité III.1., ce qui a sans doute gêné les élèves.

Notes significatives : oui pour le premier et le deuxième tiers. Parmi les très bons candidats, seuls les très rapides élèves auront eu le temps de démontrer leurs qualités.

IV. Parties du programmes utilisées

3. Intégration sur un segment ;
7. Intégration sur un intervalle quelconque ;
8. Intégrales à paramètres ;

On croise l'équation différentielle $y" = y$ et on calcule le laplacien de la fonction $\dfrac{x}{t^2+x^2}$, mais cela ne permet pas, à mon avis, de mettre les paragraphes 9. et 10. dans la liste.

La partie II traite de convergence de série et de l'existence de $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{t\,f(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ quand f est périodique. Elle peut être traitée en première année.