ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1984

MATHÉMATIQUES

1ère ÉPREUVE

OPTIONS M, P' et T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHS I

Notations :

. $\mathbb{Z}$: groupe des entiers relatifs.

. $\mathbb{R}$: corps des réels ; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

. $\mathbb{C}$: corps des complexes ; $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x = \mathcal{R}e\, z$ et $y = \mathcal{I}m\, z$

. $\mathbb{C}[X]$: espace des polynômes construits sur $\mathbb{C}$.

. e^z ou $\exp(z)$ désignera la valeur prise par la fonction exponentielle au point z de $\mathbb{C}$.

. Un morphisme φ d'un groupe A muni d'une loi de composition $*$, $(A, *)$, dans un groupe B, muni d'une loi $_\circ$, $(B, _\circ)$ est une application de A dans B telle que :

$$\forall\, x, y \in A \quad , \quad \varphi(x * y) = \varphi(x)\,_\circ\, \varphi(y).$$

Le morphisme φ est un isomorphisme si φ est une bijection.

. Un endomorphisme d'un groupe est un morphisme de ce groupe dans lui-même.

. Une matrice carrée A d'ordre n sera désignée par ses éléments a_{ij} en écrivant :

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \qquad \begin{array}{l} i : \text{indice de ligne} \\ j : \text{indice de colonne.} \end{array}$$

detA désigne le déterminant de A.

Le sujet comporte trois parties ; les deux premières questions de la seconde partie et les trois premières de la troisième partie sont indépendantes de la première partie.

LA TROISIÈME PARTIE NE SERA PAS TRAITÉE PAR LES CANDIDATS DE L'OPTION T.A.

.../...

1ère PARTIE

Soit G l'ensemble des morphismes continus g du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, .)$.

1°) Montrer que G est muni canoniquement d'une structure de groupe multiplicatif abélien.

2°) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$; désignons par $\varphi(a, b)$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$\varphi(a, b)(z) = \exp(a\,\mathcal{R}e z + b\,\mathcal{I}m z).$$

Vérifier que $\varphi(a, b)$ appartient à G et que $\varphi(a, b)$ est surjective si et seulement si la famille $\{a, b\}$ est libre, lorsque l'espace $\mathbb{C}$ est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Supposons que a et b ne sont pas tous les deux nuls ; établir que les points, dont les affixes sont les éléments du noyau de cette application $\varphi(a, b)$, constituent, selon que la famille $\{a, b\}$ est libre ou non, un ensemble dénombrable de points alignés ou une famille finie ou dénombrable de droites parallèles.

3°) Montrer que l'application φ, qui associe au couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ le morphisme $\varphi(a, b)$ de G, est un morphisme injectif du groupe additif $(\mathbb{C}^2, +)$ dans le groupe G.

4°) Soit $g \in G$; montrer brièvement que la restriction f de g à $\mathbb{R}$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui ne s'annule pas.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad F(x + y) = F(x) + f(x)\,F(y).$$

En remarquant que cette fonction F n'est pas identiquement nulle, montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable et est solution d'une équation différentielle ; en déduire f.

5°) Montrer que l'application φ est un isomorphisme de groupes.

<u>Indication</u> : pour un morphisme g de G, considérer les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$:

$$x \longmapsto g(x) \text{ et } x \longmapsto g(ix).$$

2ème PARTIE

Soit H le groupe des endomorphismes continus du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

1°) Soient $p \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$; montrer que l'application $\psi(p, a)$ définie par :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^* \qquad \psi(p, a)(z) = z^p.\exp(a.\ln|z|)$$

appartient à H.

2°) Montrer que l'application ψ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ dans H définie par $(p, a) \longmapsto \psi(p, a)$ est un morphisme injectif du groupe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{C}, +)$ dans H.

3°) Montrer, à l'aide de la 1ère partie, que ce morphisme ψ est surjectif.

4°) Soit h un endomorphisme rationnel $(\in H)$; c'est-à-dire : $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) \in \mathbb{C}\,[X]$; montrer qu'il existe p appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $h = \psi(p, 0)$.

5°) Soit h_1 un endomorphisme continu du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$.

Montrer qu'il existe un réel ε égal à 1 ou à -1 tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* \qquad h_1(-x) = \varepsilon\, h_1(x).$$

Préciser, en utilisant la question 3°, les endomorphismes continus du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$.

3ème PARTIE

NE CONCERNE PAS LES CANDIDATS DE L'OPTION T.A.

Le résultat : "toute matrice carrée complexe d'ordre n ($n \geq 1$) est semblable à une matrice triangulaire supérieure" sera admis.

L'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n a une dimension finie ; il sera supposé muni d'une norme ; soit $GL(n, \mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

Soit ρ un morphisme continu du groupe multiplicatif $GL(n, \mathbb{C})$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

1°) Montrer que deux matrices semblables de $GL(n, \mathbb{C})$ ont même image par ρ.

2°) Soit A une matrice triangulaire supérieure inversible ; montrer que les deux matrices A' et A", définies ci-dessous, ont même image :

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,..,n} \quad ; \quad A' = \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)_{i,j=1,..,n} \quad ; \quad A'' = \left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right)_{i,j=1,..,n}.$$

3°) Montrer que l'image par cette application ρ d'une matrice M, triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux valent 1, est égale à 1.

<u>Indications</u> : Soit $M = (m_{ij})_{i,j=1,..,n}$ cette matrice, considérer les matrice $A'(x)$ et $A''(x)$ associées à la matrice $A(x)$ définie par :

$$A(x) = (a_{ij})_{i,j=1,..,n} \text{ où : } a_{11} = x, \ a_{ij} = m_{ij}$$

pour toutes les autres valeurs de i et de j ; faire tendre le réel x vers $+\infty$; achever la démonstration par récurrence.

En déduire que si A est une matrice de $GL(n, \mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$, distinctes ou non, $\rho(A)$ est égale à la valeur de ρ sur la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$.

4°) Montrer que, pour toute matrice A de $GL(n, \mathbb{C})$, la valeur prise par ρ sur A est égale à celle prise par ρ sur la matrice diagonale D, d'éléments diagonaux : $d_{11} = \det A$, $d_{ii} = 1$, $2 \leq i \leq n$.

En déduire : $\exists\, p \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C} : \forall A \in GL(n, \mathbb{C}) \quad \rho(A) = \psi(p,a)\,(\det A)$.

5°) Déterminer les morphismes rationnels ρ de $GL(n, \mathbb{C})$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ ($\forall A \in GL(n, \mathbb{C})$, $\rho(A) \in \mathbb{C}[X]$).