ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,

Concours d'admission 1988

MATHÉMATIQUES

Deuxième épreuve

OPTION M

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

L'élément $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ est identifié à la matrice colonne constituée par les n nombres x_i. On identifie également l'algèbre $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre n (respectivement l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées complexes d'ordre n) à l'algèbre des endomorphismes de l'espace $\mathbb{R}^n$ (respectivement de l'espace $\mathbb{C}^n$).

La transposée d'une matrice M quelconque est notée ^{t}M. La matrice unité d'ordre n est notée I_n.

Soit A une matrice carrée donnée, élément de $M_n(\mathbb{C})$; l'objectif du problème est de comparer l'allure des solutions du système différentiel :

$$(1) \qquad \frac{dY}{dt} = AY$$

à celle des solutions du système différentiel :

$$(2) \qquad \frac{dY}{dt} = Y$$

lorsque A a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement positive. Dans la partie I, on étudie un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ puis un endomorphisme de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$, associé au précédent, qui joue un rôle fondamental dans la comparaison des systèmes (1) et (2).

PARTIE I

Dans cette partie, sauf dans la question 6° où A sera supposée à coefficients réels, A désigne une matrice carrée donnée, élément de $M_n(\mathbb{C})$. On note L_A l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ qui à tout élément M de $M_n(\mathbb{C})$ associe $L_A(M) = {}^tAM + MA$.

1° Soient V et W deux vecteurs propres de ^{t}A, associés respectivement aux valeurs propres a et b de A; montrer que la matrice carrée $V\,{}^tW$ est un vecteur propre de L_A. Préciser la valeur propre associée.

2° Soient λ une valeur propre de L_A et B un vecteur propre de L_A associé à λ.

a) Montrer que, pour tout polynôme Q à coefficients complexes, on a la relation : $Q({}^tA)\,B = B\,Q(\lambda I_n - A)$.

(On pourra d'abord établir cette relation lorsque Q se réduit à une puissance de l'indéterminée.)

b) Soit Δ le polynôme caractéristique de A, calculer $\Delta({}^tA)$.

c) Montrer que, si λ n'est pas la somme de deux valeurs propres de A, $\Delta(\lambda I_n - A)$ est inversible. (On pourra décomposer Δ en produit de facteurs irréductibles.)

d) En déduire que toute valeur propre de L_A est la somme de deux valeurs propres de A.

3° On suppose A diagonalisable.

a) Montrer que ^{t}A est diagonalisable.

b) Montrer que L_A est diagonalisable. Pour cela, on prouvera que si $B_1, B_2, ..., B_n$ constituent une base de vecteurs propres de ^{t}A, alors les produits matriciels $B_i\,{}^tB_j$, où les indices i et j prennent les valeurs 1, 2, ... n, forment une base de vecteurs propres de L_A.

4° Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que L_A soit un automorphisme.

5° *Caractérisation des formes quadratiques définies positives.*

On rappelle que le produit scalaire des éléments X et Y de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire ^{t}XY, la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ s'exprimant par $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$. On rappelle aussi que toute forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $q(X) = {}^tXMX$ où M est la matrice carrée réelle symétrique associée à q. On définit ainsi un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_n des formes quadratiques sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles symétriques d'ordre n. On rappelle enfin qu'une forme quadratique est définie positive si, pour tout élément X non nul de $\mathbb{R}^n$, $q(X)$ est strictement positif.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT

a) Montrer que q est définie positive si, et seulement si, les valeurs propres de la matrice symétrique associée à q sont toutes strictement positives.

b) Dans ces conditions, soient λ la plus petite valeur propre et μ la plus grande valeur propre de cette matrice associée à q. Montrer que, quel que soit l'élément X de $\mathbf{R}^n$:

$$\lambda \| X \|^2 \leq q(X) \leq \mu \| X \|^2.$$

6° *Endomorphisme de* E_n *déduit de* L_A.

On suppose dans cette question que A appartient à $M_n(\mathbf{R})$.

a) Vérifier que si M est une matrice réelle symétrique, $L_A(M)$ l'est également.

b) Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ dont M est la matrice réelle symétrique associée. On note $U_A(q)$, ou plus simplement $U_A q$, la forme quadratique dont la matrice associée est $L_A(M)$. On définit ainsi un endomorphisme U_A de l'espace vectoriel E_n. Montrer que, si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement positive, U_A est un automorphisme de E_n.

PARTIE II

Dans toute la suite du problème, A est une matrice donnée, *élément de* $M_n(R)$, dont les *valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.*

On se propose dans cette partie, notamment par l'étude des solutions du système différentiel (1) $\dfrac{dY}{dt} = AY$, de prouver qu'il existe des formes quadratiques q telles que q et $U_A(q)$ soient simultanément définies positives.

On rappelle que, les valeurs propres de A étant les nombres λ_j de multiplicités n_j, $j = 1, 2, \ldots p$, les composantes y_k d'une solution Y du système (1) sont des fonctions de la forme :

$$t \mapsto y_k(t) = \sum_{j=1}^{j=p} P_{k,j}(t)\, e^{\lambda_j t}, \qquad \text{où } P_{k,j} \text{ est un polynôme de degré inférieur à } n_j.$$

1° *Comportement asymptotique des solutions de* (1).

Soit X un élément donné de $\mathbf{R}^n$, on considère l'unique solution $t \mapsto Y(t)$ sur $\mathbf{R}$ du système (1) telle que $Y(0) = X$.

Prouver que $Y(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$ et montrer que l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \| Y(s) \|^2\, ds$ est convergente.

2° Y étant toujours solution de (1), montrer que, pour toute forme quadratique q, on a la relation :

$$(3) \qquad \frac{d}{ds} q(Y(s)) = U_A q(Y(s)) \qquad \text{pour tout réel } s.$$

3° On suppose que la forme quadratique $U_A q$ est définie positive et on se propose de prouver que q l'est aussi. Y désigne l'unique solution de (1) telle que $Y(0) = X$, X étant donné dans $\mathbf{R}^n$, non nul.

a) Montrer que $U_A q(Y(s))$ est un nombre strictement positif quel que soit le réel s et que l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} U_A q(Y(s))\, ds$$

est convergente, de valeur strictement positive.

b) Montrer que :

$$q(X) = \int_{-\infty}^{0} U_A q(Y(s))\, ds.$$

(On pourra intégrer la relation (3) sur $[t, 0]$ et faire tendre ensuite t vers $-\infty$.)

c) En déduire que si λ et μ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice symétrique associée à $U_A q$, on a :

$$\lambda \int_{-\infty}^{0} \| Y(s) \|^2\, ds \leq q(X) \leq \mu \int_{-\infty}^{0} \| Y(s) \|^2\, ds.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer pour q ?

4° Déduire de ce qui précède que si les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement positive, alors il existe q définie positive telle que $U_A q$ soit, elle aussi, définie positive.

PARTIE III

Existence d'une bijection entre les courbes intégrales des systèmes :

$$(1) \quad \frac{dY}{dt} = AY \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \frac{dY}{dt} = Y.$$

Dans cette partie, A désignant toujours une matrice réelle de valeurs propres à partie réelle strictement positive, on suppose donnée une forme quadratique q définie positive, telle que $U_A q$ soit définie positive.

La solution Y unique du système (1) qui vérifie $Y(0) = X$ est notée f_X ; la courbe intégrale de (1) qui passe par X, c'est-à-dire de représentation paramétrique $t \mapsto f_X(t)$, est notée C_X. On définit également l'application F de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ par $F(t, X) = f_X(t)$. On note enfin S l'ensemble des X de $\mathbf{R}^n$ tels que $q(X) = 1$.

1° Établir qu'il existe deux réels α et β vérifiant $0 < \alpha \leqslant \beta$ tels que, pour tout élément X de $\mathbf{R}^n$: $\alpha\, q(X) \leqslant U_A\, q(X) \leqslant \beta\, q(X)$.

2° L'élément X de $\mathbf{R}^n$ étant supposé non nul, soit r_X la fonction numérique définie pour tout réel t par $r_X(t) = q(f_X(t))$.

Prouver que, pour tout réel t, $r_X(t) > 0$ et : (4) $\quad \alpha \leqslant \dfrac{r'_X(t)}{r_X(t)} \leqslant \beta.$

En déduire que r_X est une bijection continue, strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $]0, +\infty[$. Prouver que la courbe C_X coupe S en un point unique. Déterminer r_X lorsque $A = I_n$.

3° Les éléments de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ étant $E_1, E_2, \ldots, E_n$, on pose $f_j = f_{E_j}$.

a) Évaluer f_X en fonction des f_j et des composantes de X. En déduire que l'application $F : (t, X) \mapsto f_X(t)$ est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

b) Montrer que, pour tout couple (t, t') de réels et pour tout X de $\mathbf{R}^n$:

$$F(t' + t, X) = F(t', F(t, X)).$$

En déduire $F(-t, f_X(t)) = X$ pour tout couple (t, X) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

En déduire que la restriction $\hat{F}$ de l'application F à $\mathbf{R} \times S$ est une bijection continue de $\mathbf{R} \times S$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$: à cet effet, on utilisera le réel unique τ associé à X non nul tel que $q(F(\tau, X)) = 1$ et l'élément de $\mathbf{R}^n$ défini par $F(\tau, X)$. La bijection réciproque sera notée $\hat{F}^{-1}$.

c) On considère une suite $(Z_m)_{m \in \mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ convergente vers Z élément de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. On pose $Z_m = F(t_m, X_m)$ et $Z = F(t, X)$ où (t_m, X_m) et (t, X) sont des couples de $\mathbf{R} \times S$.

Prouver que la suite (t_m) est majorée : pour cela, on raisonnera par l'absurde et on utilisera l'encadrement, déduit des inégalités (4), de $\dfrac{r_{Z_m}(-t_m)}{q(Z_m)}$. Prouver de même que la suite (t_m) est minorée. Montrer enfin que la suite (t_m, X_m) converge vers (t, X). En déduire que $\hat{F}^{-1}$ est continue sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

4° Soit g_X la solution du système (2) $\dfrac{dY}{dt} = Y$ qui vérifie la condition initiale $g_X(0) = X$.

Expliciter cette solution. Quelle est la nature de la courbe intégrale D_X associée (c'est-à-dire de représentation paramétrique $t \mapsto g_X(t)$) ? Soit G l'application $(t, X) \mapsto g_X(t)$; démontrer que la restriction $\hat{G}$ de G à $\mathbf{R} \times S$ est une bijection continue de $\mathbf{R} \times S$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ dont la bijection réciproque $\hat{G}^{-1}$ est continue.

5° Soit H l'application de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même définie par :

$$\begin{aligned} H(Z) &= 0 && \text{si} \quad Z = 0 \\ H(Z) &= G \circ \hat{F}^{-1}(Z) && \text{si} \quad Z \neq 0. \end{aligned}$$

a) Montrer que, si l'élément Z de $\mathbf{R}^n$ vérifie $q(Z) \leqslant 1$, alors : $(q(Z))^{2/\alpha} \leqslant q(H(Z)) \leqslant (q(Z))^{2/\beta}$

b) Prouver que H est une bijection de $\mathbf{R}^n$ et que H et H^{-1} sont continues.

6° Prouver que, pour tout réel t et pour tout élément X non nul de $\mathbf{R}^n$, on a la relation : $H(f_X(t)) = e^t H(X)$.

7° Comparer les courbes C_X et $D_{H(X)}$ et énoncer le résultat obtenu.