Mines-ponts 2002- Epreuve de mathématiquesI- Corrigé

Par M. TAIBI Professeur de MP* Lycée Moulay Youssef Rabat Maroc

---

Partie I :

1- Etude de la fonction E

a) Développement en série entière de E

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a : $e^X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}X^k$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = \exp(e^x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}e^{kx}$ et puis par $e^{kx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}k^n x^n$, on a : $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}k^n x^n\right)$.

Les familles $\left(\frac{1}{k!}\frac{1}{n!}k^n x^n\right)_n$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n!}k^n x^n\right)_k$ sont sommables pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la famille $\left(\frac{1}{k!}\frac{1}{n!}k^n x^n\right)_{n,k}$ est sommable et on a : $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}k^n\right)x^n$ et par suite $E(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) Si $A_n = E^{(n)}(0)$, on a : $\forall x \in R$, $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A_n x^n$ et par unicité de développement en série entière, on en déduit : $A_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}k^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) D'après I-1-b), $A_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}k^n$, donc
$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}k^{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}k^{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}k^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(k+1)^n$$

Mais $(k+1)^n = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j k^j$, donc $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j k^j = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}k^j = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j A_j$.

Les suites $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ vérifient la même relation de récurrence (linéaire) et de plus $A_0 = A_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e = eB_0$ et $A_1 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e = eB_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, si l'on suppose que : $\forall j = 0, ..., n\,;\ A_j = eB_j$, alors
$$A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j A_j = e\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j B_j = eB_{n+1}$$

D'où la formule : $B_n = \dfrac{1}{e}A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2- Comparaison des sommes infinies

a) $(u_n)_n$ étant une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{k\geqslant 1} u_k k^n$ converge. En notant $U_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k k^n$, on a :
$$U_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n}_{P_p(n)} + \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} u_k k^n}_{R_{p,n}} \text{ et } R_{p,n} = \sum_{k=p}^{\infty} u_k k^n > \begin{cases} u_p p^n \text{ si } p \geqslant 2 \\ u_1 + u_2 2^n > u_2 2^n \text{ si } p = 1 \end{cases} \text{ car } u_k > 0.$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to\infty} R_{p,n} = +\infty$. On a aussi : $\frac{U_n}{R_{p,n}} = \frac{P_p(n)}{\sum_{k=p}^{\infty} u_k k^n} + 1$, avec $P_p(n) = 0$ si $p = 1$, il suffit donc de montrer que, pour tout $p \geqslant 2$, $\lim_{n\infty}\frac{P_p(n)}{\sum_{k=p}^{\infty} u_k k^n} = 0$ pour conclure.

Or pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$: $0 \leqslant \frac{u_k k^n}{\sum_{k=p}^{\infty} u_k k^n} \leqslant \frac{u_k k^n}{u_p p^n} \underset{n\infty}{\to} 0$, donc, par opérations, $\lim_{n\infty}\frac{P_p(n)}{\sum_{k=p}^{\infty} u_k k^n} = 0$.

D'où
$$U_n \underset{n\infty}{\sim} R_{p,n}$$

b) On suppose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k > 0$ et $v_k >$ et que $u_k \underset{k\infty}{\sim} v_k$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $u_k \underset{k\infty}{\sim} v_k$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k \geqslant p \Rightarrow |u_k - v_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_k$. Posons pour simplifier $P_p(k) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} |u_{k-v_k}|\, k^n$, on a alors :

$$\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| = \left|\frac{U_n - V_n}{V_n}\right| \leqslant \frac{P_p(k)}{V_n} + \frac{\sum\limits_{k=p}^{\infty} |u_k - v_k| k^n}{V_n} \leqslant \frac{P_p(k)}{V_n} + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\frac{\sum\limits_{k=p}^{\infty} v_k k^n}{V_n}}_{\leqslant 0} \leqslant \frac{P_p(k)}{V_n} + \frac{\varepsilon}{2} ..$$

Comme en I-2-a),on a : $\lim\limits_{n\infty} \frac{P_p(k)}{V_n} = 0$ et par suite $U_n \underset{n\infty}{\sim} V_n$.

3- Etude de la fonction f_n :

a) Etude de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} s_k$

Fixons n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $s_0 = f_n(0) = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$; $s_k = e^k k^{-k+n-\frac{1}{2}} = e^k k^{-k-\frac{1}{2}} k^n$.
Mais $k - (k + \frac{1}{2}) \ln(k) + n \ln(k) = -k \ln(k) \left(1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{\ln(k)} - \frac{n}{k}\right)$, donc $s_k \underset{k\infty}{\sim} e^{-k \ln(k)} \leqslant e^{-k}$ pour $k \geqslant 3$ et par suite $\sum s_k$ converge.

b) Posons $u_k = e^k k^{-k-\frac{1}{2}} = e^k e^{-(k+\frac{1}{2}) \ln(k)} = e^{k-(k+\frac{1}{2}) \ln(k)} > 0$ pour tout $k \geqslant 1$, on a : $s_k = u_k k^n$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k k^n$.

Par la formule de Stirling $k! \underset{k\infty}{\sim} \frac{k^k}{e^k} \sqrt{2\pi} k^{\frac{1}{2}}$, on a : $\frac{1}{k!} \underset{k\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^k k^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_k$ et par la question I-2-b), on a : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_k k^n \underset{n\infty}{\sim} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k^n = A_n$. En coclusion :

$$A_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k)$$

Partie II

$\lambda >$ et $\Phi_\lambda(x) = -x \ln(x) + x + \lambda \ln(x)$

1- Etude de la fonction Φ_λ

a) On a : $\Phi_\lambda(x) = -x \ln(x) \left[1 - \frac{1}{\ln(x)} - \frac{\lambda}{x}\right] \underset{x \to +\infty}{\sim} -x \ln(x)$
et $\Phi_\lambda(x) = \lambda \ln(x) \left[1 - \frac{x}{\lambda} + \frac{x}{\lambda \ln(x)}\right] \underset{x \to 0^+}{\sim} \lambda \ln(x)$

b) Par opérations sur les fonctions de classe C^1, Φ_λ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, avec $\Phi'_\lambda(x) = \frac{\lambda - x \ln(x)}{x}$.
Si $g(x) = \lambda - x \ln(x)$, alors $g'(x) = -\ln(x) - 1 = \ln(\frac{1}{xe})$ et on a :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\lambda>0$	$\nearrow$	$\lambda+\frac{1}{e}>0$	$\searrow$	$-\infty$

Soit μ l'unique réel de $]\frac{1}{e}, +\infty[$ tel que $g(\mu) = 0$, alors Φ_λ admet le tableau de variations suivant :

x	0		μ		$+\infty$
$\Phi'_\lambda(x)$		$+$		$-$	
$\Phi_\lambda(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

D'après l'étude précédente Φ_λ ademet un maximun atteint en un point (unique) $\mu \in]\frac{1}{e}, +\infty[$.

c) Soit φ l'application qui à λ associe l'unique réel μ. Montrons que φ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.
Posons $F(x, y) = y - x \ln(x)$, pour $(x, y) \in]\frac{1}{e}, +\infty[\times]0, +\infty[$, alors F est de classe C^2 sur l'ouvert $]\frac{1}{e}, +\infty[\times]0, +\infty[$, avec $D_1 F(x, y) = \ln(\frac{1}{xe}) \neq 0$ et ,d'après II-1-b), $F(\mu, \lambda) = 0$. En appliquant le théorème des fonctions implicites, φ est de classe C^1 et pour tout $\lambda \in]0; +\infty[$;
$\varphi'(\lambda) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\mu, \lambda)}{\frac{\partial F}{\partial x}(\mu, \lambda)} = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x}(\mu, \lambda)} = \frac{1}{\ln(\varphi(\lambda) e)}$.

2- Maximum de la fonction f_n

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_n(x) = e^x x^{-x+n-\frac{1}{2}} = e^{x-x\ln(x)+(n-\frac{1}{2})\ln(x)} = \exp(\Phi_{n-\frac{1}{2}}(x))$ pour tout $x > 0$ et que $f_n(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$. Comme exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\Phi_{n-\frac{1}{2}}$ admet un (unique maximun) $\mu_n = \varphi(n - \frac{1}{2})$, alors f_n admet μ_n comme unique maximun sur $\mathbb{R}$.
$\Phi_{n-\frac{1}{2}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition des fonctions de classe C^1, f_n est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f_n'(x) = \frac{(n-\frac{1}{2})-x\ln(x)}{x} f_n(x) = \frac{(n-\frac{1}{2})-x\ln(x)}{x} e^{x-x\ln(x)+(n-\frac{1}{2})\ln(x)}$. On a : $f_n'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{(n-\frac{1}{2})-x\ln(x)}{x} e^{(n-\frac{1}{2})\ln(x)}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n'(x) = 0$ et comme $\Phi_{n-\frac{1}{2}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} (n-\frac{1}{2})\ln(x)$, on a f_n est continue en 0 et le théorème de prolongement de la dérivée, montre que f est C^1 sur $[0, +\infty[$, avec $f_n'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f_n'(x) = 0$. Par $f_n(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et l'étude précédente, on en déduit que f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Propriétes des μ_n ($n \geqslant 1$).

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n(x) = n - \frac{1}{2} - x\ln(x)$ pour $x > 0$. Alors h_n est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $h_n'(x) = -(\ln(x) + 1) = -\ln(xe)$
Pour $n = 1$, on a : $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \mu_1 \ln(\mu_1)$.
Par une étude de l'application $h_1 : x \mapsto \frac{1}{2} - x\ln(x)$, on obtient les variations de h suivantes :

x	0		$\frac{1}{e}$	1	μ_1		$+\infty$
$h_1'(x)$		$+$			$-$		
$h_1(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$		$\searrow$	$-\infty$

Par $h_1(1) = \frac{1}{2} > 0$ et $h_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 2\ln(2) < 0$, donc $\mu_1 \in]1, 2[$.
Pour $n = 2$, on a : $\frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \mu_2 \ln(\mu_2)$
Par une étude de $h_2 : x \mapsto \frac{3}{2} - x\ln(x)$, donne :

x	0		$\frac{1}{e}$	2	μ_2		$+\infty$
$h_2'(x)$		$+$			$-$		
$h_2(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{e}$	$\frac{3}{2}-2\ln(2)$		$\searrow$	$-\infty$

$\mu_2 > 2$ car $h_2(2) = \frac{3}{2} - 2\ln(2) > 0$.
Pour $n \geqslant 3$, on a : $n - \frac{1}{2} - \mu_n \ln(\mu_n) = 0$. comme $n \geqslant 3 > e$, on a : $\ln(n) > 1$ et puis $n\ln(n) > n > n - \frac{1}{2}$, d'où $h_n(n) = n - \frac{1}{2} - n\ln(n) < 0$.
D'autre part $\ln(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} - 1 < \sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$, donc $\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) < n - \frac{1}{2}$ et puis $h_n(\sqrt{n}) > 0$.
Par définition de μ_n on en déduit que $\mu_n \in]\sqrt{n}, n[$.

ii. Soit $n > 2$, par $\sqrt{n} < \mu_n < n$, on a : $\frac{1}{2}\ln(n) < \ln(\mu_n) < \ln(n)$ et puis $\frac{1}{2}\mu_n \ln(n) < \mu_n \ln(\mu_n) = n - \frac{1}{2} < \mu_n \ln(n)$. Comme $n\ln(n) > 0$, par les inégalités précédentes, on en déduit : $\frac{(n-\frac{1}{2})}{n\ln(n)} < \frac{\mu_n}{n} < \frac{2(n-\frac{1}{2})}{n\ln(n)}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n} = 0$ et par suite $\mu_n = o(n)$.

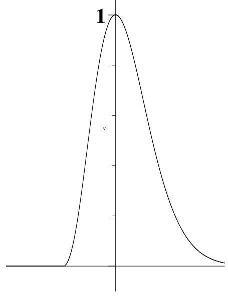
iii. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $n > 2$. Par $\mu_n \ln(\mu_n) = n - \frac{1}{2}$, on a : $n^{-\alpha}\mu_n = n^{-\alpha}\frac{n-\frac{1}{2}}{\ln(\mu_n)} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\ln(\mu_n)}$ et par $\mu_n < n < n^2$, on a aussi $\frac{1}{\ln(\mu_n)} > \frac{1}{2\ln(n)}$, donc $\frac{n^{1-\alpha}}{\ln(\mu_n)} > \frac{n^{1-\alpha}}{2\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. En conclusion $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\alpha}\mu_n = +\infty$, soit : $n^\alpha = o(\mu_n)$.

Partie III

1- Propriétés de la fonction g_n :

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \mapsto t = \mu_n(1 + \frac{x}{\sqrt{n}})$ est un homéomorphisme (même C^∞-difféomorphisme strictement croissant) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et la relation $t = \mu_n(1 + \frac{x}{\sqrt{n}})$ donne $x = (\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}t - \sqrt{n})$. Par l'identité $g_n(x) = \frac{1}{f_n(\mu_n)} f_n\left(\mu_n(1 + \frac{x}{\sqrt{n}})\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit que : $f_n(t) = f_n(\mu_n) g_n(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}t - \sqrt{n})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'où le résultat cherché.

b) D'après l'etude de f_n et de III-1-a), les fonctions g_n et f_n ont même allure avec $g_n(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(0) = 1$ et $g_n(x) = 0$ pour tout $x \leqslant -\sqrt{n}$. D'où la courbe représentative de g_n :



c) Pour $x \in \mathbb{R}$ et n entier naturel tel que $\sqrt{n} > -x$, on a :
$f_n(x) = \exp(\Phi_{n-\frac{1}{2}}(x))$, donc $g_n(x) = e^{\Phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n)} e^{\Phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n(1+\frac{x}{\sqrt{n}}))}$.
Or, par la relation de II-1-, on a :
$\Phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) = \Phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n) + (\mu_n - n + \frac{1}{2})(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(x)) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})$,
d'où $g_n(x) = \exp\left((\mu_n - n + \frac{1}{2})(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)$. Par $\mu_n = o(n)$, on a : $\frac{\mu_n}{n} = o(1)$ et $\mu_n \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) \sim \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\to} 0$, donc $\mu_n \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) = o(1)$ et $\mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) = o(1)$
On a aussi $\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) = \frac{x}{\sqrt{n}} - (\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})) = \frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})$, donc :
$-(n-\frac{1}{2})\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right) = -(n-\frac{1}{2})\left(\frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) = -\frac{x^2}{2} + o(1)$ et par suite :
$(\mu_n - n + \frac{1}{2})(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) = -\frac{x^2}{2} + o(1)$. On en déduit :
$g_n(x) = \exp(-x^2 + o(1))$ et puis $(g_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, vers la fonction g telle que $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

d) Pour tout réel $x > \sqrt{n}$, on a :
$(\mu_n - n + \frac{1}{2})(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) = -\frac{n}{2}(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) + \alpha$ avec :
$\alpha = -\mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) + (\mu_n - \frac{n}{2} + \frac{1}{2})(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) = -\mu_n t \ln(1+t) + (\mu_n - \frac{n}{2} + \frac{1}{2})(t - \ln(1+t))$ où $t = \frac{x}{\sqrt{n}} > -1$.
Mais $\mu_n = o(n-1)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 < \mu_n \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$, donc $\mu_n - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \leqslant 0$. On a aussi $t\ln(1+t) \geqslant 0$, $(t - \ln(1+t)) \geqslant 0$ et $\mu_n > 0$, donc : $\alpha \leqslant 0$ et par suite $(\mu_n - n + \frac{1}{2})(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) \leqslant -\frac{n}{2}(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}))$. Ce qui permet, avec la croissance de exp, que : $g_n(x) = \exp(-\frac{n}{2}(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})) + \alpha) \leqslant \exp\left(-\frac{n}{2}(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}))\right)$ dès que $n \geqslant n_0$.

2- Une majoration de la fonction g_n :

a) L'application $u : x \mapsto \frac{1}{x^2}(x - \ln(1+x))$ est définie et continue (même de classe C^∞) sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$.
Un développement limité en 0 de $u(x)$ donne :
$u(x) = \frac{1}{x^2}(x - \ln(1+x)) = \frac{1}{x^2}\left(x - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x)$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \frac{1}{2}$ et par suite u admet un prolongement par continuité en 0.
Posons $u(0) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad u'(x) &= -\frac{2}{x^3}(x - \ln(1+x)) + \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \\ &= -\frac{2}{x^3}(x - \ln(1+x)) + \frac{1}{x}\frac{1}{1+x} \\ &= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + \frac{1}{x}(1 - x + x^2 + o(x^2)) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x - o(x) \end{aligned}$$

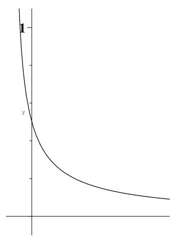
Donc $\lim\limits_{x \to 0} u'(x) = -\frac{1}{3}$. Par le théorème de prolongement de la dérivée, u est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$.
On peut aussi démontrer que u est de classe C^1 (même C^∞), en développant u en série entière autour de 0.
Pour tout réel $x > -1$, on a :

$u'(x) = -\frac{2}{x^3}\left(x - \ln(1+x)\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = -\frac{2x+x^2-2\ln(1+x)-2(\ln(1+x))x}{x^3(1+x)} \leqslant 0$
car par $\ln(1+x) \leqslant x$, on a :
$2x+x^2-2\ln(1+x)-2(\ln(1+x))x = (x-\ln(1+x))^2+\ln^2(1+x)+2(x-\ln(1+x)) \geqslant 0$, donc u est décroissante sur $]-1,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$. Il en sésulte que u est positive sur $]-1,+\infty[$.

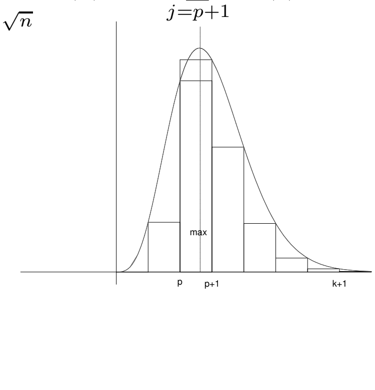
b) Pour $n \geqslant n_0$ et $x > -\sqrt{n}$, posons $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$, on a :
$g_n(x) = g_n(\sqrt{n}t) = \exp(-\frac{n}{2}(t - \ln(1+t))) = \exp(-\frac{n}{2}t^2u(t)) = \exp(-\frac{x^2}{2}u(\frac{x}{\sqrt{n}}))$.
Pour $x \leqslant 0$, on a : $\frac{x}{\sqrt{n}} \in]-1,0]$, donc $u(\frac{x}{\sqrt{n}}) \geqslant u(0) = \frac{1}{2}$ et par suite $g_n(x) \leqslant \exp(-\frac{x^2}{4})$.
Pour $x \geqslant 0$, on a : $t = \frac{x}{\sqrt{n}} \leqslant x$, donc $u(t) \geqslant u(x)$ et par suite :
$g_n(x) \leqslant \exp(-\frac{x^2}{2}u(x)) = \exp(-\frac{1}{2}u(x)) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \ln(1+x))\right)$.

Partie IV : Recherche d'un équivalent de B_n

1- Intégrabilité de la fonction g_n :
D'après III-2-b) on a : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{2}(x-\ln(x))} = \sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
L'application ϕ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $0 \leqslant \phi(x) \leqslant e^x$ pour $x \leqslant -1$ et $\phi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\frac{3}{2}})$.
Donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.
La suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $g : x \to e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et que chaque g_n est dominée par la fonction ϕ intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de convergence dominée, la suite $\left(I_n = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx\right)_{n\geqslant 1}$ converge et on a : $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.



2- Un encadrement de la somme S_n :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $p = [\mu_n]$ (partie entière de μ_n), $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{p} f_n(k)$, $S''_n = \sum\limits_{k=p+1}^{\infty} f_n(k)$,
$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\mu_n}x - \sqrt{n}$ et $h_n(x) = f_n(\mu_n)g_n \circ \psi_n(x)$
L'application ψ_n est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ strictement croissant , donc h_n a les mêmes variations que g_n :
Puisque $\psi_n([p+1,+\infty[) = [\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1) - \sqrt{n}, +\infty[\subset [0,+\infty[$ et que g_n est continue , posotive, décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$, donc la série $\sum\limits_{j\geqslant p+1} h_n(j)$ converge et que : $0 \leqslant \sum\limits_{j=p+2}^{+\infty} h_n(j) \leqslant$
$\int\limits_{p+1}^{+\infty} h_n(t)dt = f_n(\mu_n) \int\limits_{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}}^{+\infty} g_n(x)dx \leqslant \sum\limits_{j=p+1}^{+\infty} h_n(j)$.



Et par l'identité $f_n(k) = f_n(\mu_n) g_n(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n} k - \sqrt{n}) = h_n(k)$, on obtient :

$$S_n'' = \sum_{k=p+1}^{\infty} h_n(k) \geqslant \int_{p+1}^{+\infty} g_n(x)dx = f_n(\mu_n) \int_{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}}^{+\infty} g_n(x)dx$$

Comme g_n est croissante sur $]-\infty, 0]$, h_n est aussi croissante sur $]-\infty, p] \subset]-\infty, \mu_n]$, et donc :

$$\sum_{k=0}^{p-1} h_n(k) \leqslant \int_0^p h_n(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} h_n(k+1) = \sum_{k=1}^{p} h_n(k)$$

et que $\int_0^p h_n(t)dt = f_n(\mu_n) \int_{-\sqrt{n}}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}} g_n(x)dx = f_n(\mu_n) \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}} g_n(x)dx$

D'où : $S_n' = \sum_{k=0}^{p} h_n(k) = \sum_{k=1}^{p} h_n(k) \geqslant \int_0^p h_n(t)dt = f_n(\mu_n) \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}} g_n(x)dx$ et par suite

$$\begin{aligned} S_n = S_n' + S_n'' \geqslant \int_0^p h_n(t)dt + \int_{p+1}^{+\infty} g_n(x)dx &= f_n(\mu_n) \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}} g_n(x)dx + f_n(\mu_n) \int_{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}}^{+\infty} g_n(x)dx \\ &\geqslant f_n(\mu_n) \left(I_n - \int_{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}} g_n(x)dx \right) \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} S_n' = \left(\sum_{k=0}^{p-1} h_n(k) + g_n \circ \psi_n(p) \right) &\leqslant \int_0^p h_n(t)dt + f_n(\mu_n) g_n \circ \psi_n(p) \\ &= f_n(\mu_n) \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}} g_n(x)dx + f_n(\mu_n) g_n \left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n} p - \sqrt{n} \right). \\ &\leqslant f_n(\mu_n) \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}} g_n(x)dx \qquad \text{car } h_n(p) < h_n(p+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad S_n &\leqslant f_n(\mu_n) \int_{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}}^{+\infty} g_n(x)dx + f_n(\mu_n) \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}} g_n(x)dx \\ &\leqslant f_n(\mu_n) I_n \\ &\leqslant f_n(\mu_n)(I_n + \int_{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}} g_n(x)dx) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$K_n (I_n - \varepsilon_n) \leqslant S_n = S_n' + S_n'' \leqslant K_n (I_n + \varepsilon_n)$$

avec $K_n = f_n(\mu_n)$ et $\varepsilon_n = \int_{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}p-\sqrt{n}}^{\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}(p+1)-\sqrt{n}} g_n(x)dx \underset{n\infty}{\to} 0$ car $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\mu_n} \underset{n\infty}{\to} 0$, d'après la question II-2-b) iii).

3- Un équivalent de B_n :

Les inégalités de la question IV-2. montrent que : $|S_n - K_n I_n| \leqslant \varepsilon_n K_n = \frac{\varepsilon_n}{I_n} K_n I_n$ avec $\frac{\varepsilon_n}{I_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ car $I_n \underset{n\to\infty}{\to} \sqrt{2\pi}$ et $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Donc $S_n \sim K_n I_n \sim \sqrt{2\pi} f_n(\mu_n)$

Par I-3-b) $A_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_n$ et par I-1-c) $B_n = \frac{1}{e} A_n$, on a : $B_n \sim \frac{1}{e} f_n(\mu_n)$