ECOLE POLYTECHNIQUE - E.S.P.C.I 2001

Maths 2 - PC

Première Partie - Matrices symplectiques.

Pour tout entier pair $n = 2m$, on considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ et on note

$$\mathcal{SP}_n = \{M \in \mathcal{M}_n \;/\; {}^tMJM = J\}$$

l'ensemble des matrices symplectiques.

1.a) Sachant que $\det({}^tM) = \det(M)$ et $\det(J) = 1$, on obtient $\det(M) = \pm 1$ pour tout $M \in \mathcal{SP}_n$.

b) L'ensemble $\mathcal{SP}_n$ est un sous-ensemble non vide (car $I_n \in \mathcal{SP}_n$) de l'anneau $(\mathcal{M}_n, +, \times)$. Il est stable par $\times$ d'après ce qui suit

$$\forall M, N \in \mathcal{SP}_n, \quad {}^t(MN)J(MN) = {}^tN({}^tMJM)N = {}^tMJM = J.$$

M étant inversible, on a les implications

$${}^tMJM = J \quad \Rightarrow \quad {}^t(M^{-1})({}^tMJM)M^{-1} = {}^t(M^{-1})JM^{-1} \quad \Rightarrow \quad J = {}^t(M^{-1})JM^{-1}.$$

L'inverse d'une matrice symplectique est donc symplectique. Il en résulte que $(\mathcal{SP}_n, \times)$ est un groupe.

c) D'après l'égalité $J^{-1} = {}^tJ$, J est symplectique.

d) M étant inversible, l'égalité $J^{-1} = -J$ permet d'écrire

$${}^tMJM = J \quad \Rightarrow \quad MJ\,{}^tM = MJ({}^tMJM)M^{-1}J^{-1} = MJJM^{-1}J^{-1} = -I_nJ^{-1} = J.$$

On en déduit que la transposé d'une matrice symplectique est symplectique.

2. On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_m$.

a) Un calcul par blocs donne ${}^tMJM = \begin{pmatrix} {}^tCA - {}^tAC & {}^tCB - {}^tAD \\ {}^tDA - {}^tBC & {}^tDB - {}^tBD \end{pmatrix}$. Il en résulte que

$$M \in \mathcal{SP}_n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} {}^tCA = {}^tAC \text{ et } {}^tDB = {}^tBD \\ {}^tAD - {}^tCB = {}^tDA - {}^tBC = I_m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} {}^tAC \text{ et } {}^tBD \text{ sont symétriques,} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m \end{array} \right.$$

b) On suppose D inversible. Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & QD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il existe $Q \in \mathcal{M}_m$ (prendre $Q = BD^{-1}$) tel que

$$M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est symplectique.
La relation $QD = B$ donne ${}^tD{}^tQD = {}^tBD$ avec ${}^tBD$ symétrique d'après **a)**. On en déduit que ${}^tQ$ est une matrice symétrique, et Q également.
Le calcul par blocs d'un déterminant donne

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det(A - QC)\,\det(D)\\ &= \det({}^tA - {}^tC{}^tQ)\,\det(D)\\ &= \det({}^tAD - {}^tCQD)\\ &= \det({}^tAD - {}^tCB)\end{aligned}$$

Il résulte de **a)** que, si M est symplectique avec D inversible alors $\det(M) = 1$.

c) On suppose que ${}^tBD$ est symétrique et qu'il existe s_1, s_2 tels que $s_1 \neq s_2$, $(\underline{D} - s_1\underline{B})v_1 = 0$ et $(\underline{D} - s_2\underline{B})v_2 = 0$.
Le calcul donne $(\underline{D}v_1|\underline{D}v_2) = s_1(\underline{B}v_1|\underline{D}v_2) = s_1{}^tV_1{}^tBDV_2$ où V_1, V_2 sont les matrices colonnes de v_1, v_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^m$.
La symétrie du produit scalaire donne $(\underline{D}v_1|\underline{D}v_2) = s_2{}^tV_2{}^tBDV_1$.
La symétrie de ${}^tBD$ donne ${}^tV_1{}^tBDV_2 = {}^tV_2{}^tBDV_1$. Il résulte de $s_1 \neq s_2$ que $(\underline{D}v_1|\underline{D}v_2) = 0$.

d) On suppose que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est symplectique.
Si $\underline{D}v = \underline{B}v = 0$, alors $\underline{M}(0, v) = 0$. Il résulte alors de l'inversibilité de M que $v = 0$.
Supposons que, pour tout réel $s_i \neq 0$, on ait $D - s_iB$ non inversible. Il existe donc $v_i \neq 0$ tel que $Dv_i = s_iBv_i$.
D'après ce qui précède, on a $Dv_i \neq 0$ (sinon $Bv_i = 0$ et $v_i = 0$).
Il résulte de **c)** que $(Dv_i)_{v_i \in \mathbf{R}\setminus\{0\}}$ est une famille infinie orthogonale de vecteurs non nuls, elle est donc libre. Cela contredit la dimension finie de l'espace $\mathbf{R}^m$.
Finalement, il existe $s \neq 0$ tel que $D - sB$ soit inversible.
Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C - sA & D - sB \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}$ est une matrice symplectique.
Ainsi $\begin{pmatrix} A & B \\ C - sA & D - sB \end{pmatrix}$ est symplectique avec $D-sB$ inversible. D'après **b)**, son déterminant vaut 1.
Il en résulte que $\det(M) = 1$.

3. Soit M une matrice symplectique et P son polynôme caractéristique.

a) De l'égalité ${}^tMJM = J$, on tire $(J^{-1}{}^tMJ)M = I_{2m}$. Ainsi $M^{-1} = J^{-1}{}^tMJ$ est semblable à ${}^tM$. Il en résulte que M et M^{-1} ont le même polynôme caractéristique.

$$P(X) = \det(M - XI_{2m}) = \det(M^{-1} - XI_{2m}).$$

Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, non nul, on a

$$\begin{aligned}P(\frac{1}{\lambda}) &= \det(M^{-1} - \frac{1}{\lambda}I_{2m})\\ &= \det(M)\,\det(M^{-1} - \frac{1}{\lambda}I_{2m}) \quad \text{car } \det(M) = 1\\ &= \det(I_{2m} - \frac{1}{\lambda}M)\\ &= \frac{1}{\lambda^{2m}}\det(\lambda I_{2m} - M)\\ &= \frac{1}{\lambda^{2m}}P(\lambda) \quad \text{car } P \text{ de degré pair}\end{aligned}$$

b) P étant un polynôme à coefficients réels, il en résulte que si λ_0 est une valeur propre de M de multiplicité d, alors $\overline{\lambda_0}$ est aussi valeur propre de M avec la même multiplicité.

On note $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{d_i}$ où les λ_i sont toutes distinctes.

On a $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{d_i}$ et $\lambda^{2m}P(\frac{1}{\lambda}) = \lambda^{2m}\prod_{i=1}^{k}(\frac{1}{\lambda}-\lambda_i)^{d_i} = \prod_{i=1}^{k}(1-\lambda\lambda_i)^{d_i}$

En mettant en facteur les λ_i, en utilisant **a)** et le fait que $\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{d_i} = \det(M) = 1$, on obtient

$$\forall\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0\}, \quad \prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{d_i} = \prod_{i=1}^{k}(\frac{1}{\lambda_i}-\lambda)^{d_i},$$

d'où l'égalité polynomiale $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(\frac{1}{\lambda_i}-X)^{d_i}$.

Il en résulte que si λ_0 est une valeur propre de M de multiplicité d, alors $\frac{1}{\lambda_0}$ est aussi valeur propre de M de multiplicité d. Il en est donc de même pour $\frac{1}{\overline{\lambda_0}}$.

c) Si λ_0 est un réel différent de ± 1, l'ensemble $E(\lambda_0) = \{\lambda_0, \overline{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\overline{\lambda_0}}\}$ a deux éléments.

Si λ_0 est un complexe, l'ensemble $E(\lambda_0)$ a deux ou quatre éléments selon que $|\lambda_0| = 1$ ou pas.
P étant de degré pair, il en résulte que la somme des ordres de multiplicité de 1 et -1 est pair.
Pour $\lambda_0 \neq -1$, le produit des éléments de chaque $E(\lambda_0)$ vaut 1. Comme $\det(M) = 1$, il en résulte que -1 a un ordre de multiplicité pair, et donc également 1.

d) On suppose dans cette question que $m = 2$.

(1) La matrice diagonale $M = I_4$ est clairement symplectique et admet une seule valeur propre.

(2) La matrice $M = J$, symplectique d'après 1.c), annule le polynôme X^2+1, qui est scindé et a racines simples sur $\mathbf{C}$. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbf{C}$ avec un spectre contenu dans $\{i, -i\}$.
Comme J est réelle alors i et $-i$ sont valeurs propres, et de même multiplicité (ici 2).

(3) Si M admet une valeur propre double et deux autres simples, alors la valeur propre double est réelle et égale à ± 1. Les deux autres peuvent être deux complexes conjugués de module 1 ou deux réels.
La matrice diagonale $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, symplectique d'après **2.a)**, est une solution.

(4) On cherche une matrice symplectique sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec ${}^tAD = I_2$.
Le calcul par blocs donne le polynôme caractéristique $P(X)$ =det$(A - XI_2)$ det$(D - XI_2)$.
En considérant une matrice D ayant deux valeurs propres complexes conjuguées de module $\neq 1$, on obtient une matrice M ayant quatre valeurs propres complexes differentes. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
Avec $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, on obtient une matrice M ayant les valeurs propres $2i$, $-2i$, $\frac{i}{2}$ et $-\frac{i}{2}$

On laisse au lecteur le soin de faire les tracés !

e) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, où $B \in \mathcal{M}_m$ est une matrice symétrique.

La matrice M est symplectique d'après **2.a)**. Elle est triangulaire supérieure avec 1 pour unique valeur propre.

Si M était diagonalisable sur $\mathbf{C}$, elle serait semblable à I_{2m}, donc égale à I_{2m}, ce qui est faux dès qu'on choisit $B \neq 0$.

Deuxième Partie - Formes symplectiques et endomorphismes symplectiques.

Soit n un entier ≥ 1. On appelle forme symplectique sur $\mathbf{R}^n$ une forme bilinéaire, antisymétrique et non dégénérée.

4.a) Soit $w : (x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow (\eta(x)|y)$ où η est endomorphisme antisymétrique de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

La bilinéarité de w résulte de la linéarité de η et de la bilinéarité du produit scalaire $(\,|\,)$.

L'antisymétrie de w résulte de l'antisymétrie de η. En effet

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad w(y,x) = (\eta(y)|x) = (y|\eta^*(x)) = -(y|\eta(x)) = -w(x,y).$$

La condition $w(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ équivaut à $\eta(x) = 0$. Ainsi w est non dégénérée si et seulement si $\mathrm{Ker}(\eta) = \{0\}$, ce qui équivaut à η bijective en dimension finie.

b) On rappelle que pour un espace euclidien $(E, <\,,\,>)$, on dispose de l'isomorphisme canonique

$$x \in E \longrightarrow \delta_x \in E^* \text{ où } \delta_x(y) = <x, y> .$$

Soit w une forme symplectique sur $\mathbf{R}^n$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, l'application $w_x : y \to w(x,y)$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$. D'après le rappel, il existe un unique élément de $\mathbf{R}^n$, noté $\eta(x)$ tel que $w_x = \delta_{\eta(x)}$, d'où l'existence d'une application η de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad w(x,y) = (\eta(x)|y).$$

La linéarité de η résulte de la linéarité à gauche de w.

La définition de l'adjoint η^* et l'antisymétrie de w donnent

$$w(x,y) = (\eta(x)|y) = (x|\eta^*(y)) \quad \text{et} \quad w(y,x) = (\eta(y)|x) = (x|\eta(y)).$$

Il en résulte que $\eta^*(y) = -\eta(y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$, donc η est antisymétrique.

Enfin l'inversibilité de η résulte, comme au **a)**, de la non dégénérescense de w.

5. D'après **4.**, l'existence d'une forme symplectique w sur $\mathbf{R}^n$ est liée à l'existence d'un isomorphime antisymétrique η sur $\mathbf{R}^n$.

On a $\det(\eta^*) = \det(\eta)$ et $\det(-\eta) = (-1)^n \det(\eta)$ avec $\det(\eta) \neq 0$. Ainsi n est pair.

6. Désormais, on suppose que $n = 2m$. On note $w_0(x,y) = (\underline{J}(x)|y)$.

a) J est la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq 2m}$ (orthonormale) de $\mathbf{R}^{2m}$, de l'endomorphime $\underline{J}$.

J étant une matrice antisymétrique telle que $\det(J) = 1$, il en résulte que $\underline{J}$ est un isomorphime antisymétrique. Ainsi w_0 est une forme symplectique sur $\mathbf{R}^{2m}$.

b) On a $\underline{J}(e_k) = \begin{cases} e_{k+m} & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ -e_{k-m} & \text{si } m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$

Ainsi $w_0(e_k, e_l) = (\underline{J}(e_k)|e_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq k \leq m \text{ et } l = k+m \\ -1 & \text{si } m+1 \leq k \leq 2m \text{ et } k = l+m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) Soit φ un endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}$.

En notant X, Y les matrices colonnes dans $\mathcal{B}$ de $x, y \in \mathbf{R}^{2m}$, les réels $w_0(x,y)$ et $w_0(\varphi(x), \varphi(y))$ s'identifient respectivement aux matrices ${}^tYJX$ et ${}^t(MY)JMX = {}^tY{}^tMJMX$.

Il en résulte que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad w_0(\varphi(x), \varphi(y)) = w_0(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad {}^tMJM = J,$$

ce qui équivaut à dire que M est une matrice symplectique.

Dans ce cas, on dit que φ est un endomorphisme symplectique.

7. Un endomorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ est dit stable, si pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la suite $(\|\varphi^p(x)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ est bornée.

a) On suppose que φ admet, dans $\mathbf{C}$, n valeurs propres distinctes de module 1. φ est donc diagonalisable dans $\mathbf{C}$.

Il existe $P \in GL(n,\mathbf{C})$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, avec $|\lambda_i| = 1$ pour $1 \leq i \leq n$, tels que $M = P\Delta P^{-1}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ où $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}X$.

On vérifie aisément que $\| \ \|_1$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

On a $\|\varphi(x)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ où $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = P^{-1}MX$. Or $P^{-1}MX = \Delta P^{-1}X = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\|\varphi(x)\|_1 = \|x\|_1$. Ainsi la suite $(\|\varphi^p(x)\|_1)_{p\in\mathbf{N}}$ est bornée pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.
L'équivalence des normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|$ assure que la suite $(\|\varphi^p(x)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ est également bornée.
Ainsi l'endomorphisme φ est stable.

b) Soit φ un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique où $\Omega \in \mathcal{M}_m$.

D'après **2.a)** et **6.c)**, φ est symplectique si et seulement si ${}^t\Omega\Omega = I_m$, c'est-à-dire Ω matrice orthogonale.
Un calcul par blocs donne

$${}^t\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\Omega\Omega & 0 \\ 0 & {}^t\Omega\Omega \end{pmatrix} = I_{2m}.$$

Ainsi l'endomorphisme φ est orthogonal. Il est donc automatiquement stable.

c) Soit φ un endomorphisme symplectique de $\mathbf{R}^{2m}$ possédant une valeur propre de module $\neq 1$.
D'après **3.b)**, il admet donc une valeur propre λ_0 telle que $| \lambda_0 | > 1$.
Si $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, alors il existe $x_0 \in \mathbf{R}^{2m}\backslash\{0\}$ tel que $\varphi(x_0) = \lambda_0 x_0$.
Il résulte de la relation $\|\varphi^p(x_0)\| = |\lambda_0|^p\|x_0\|$, que la suite $(\|\varphi^p(x_0)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée. φ n'est donc pas stable.
Si $\lambda_0 \notin \mathbf{R}$, alors il existe $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{C}^{2m}\backslash\{0\}$ tel que $\varphi(z_0) = \lambda_0 z_0$.
Comme la matrice de φ est réelle, alors le vecteur conjugué $x_0 - iy_0$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\overline{\lambda_0}$. λ_0 et $\overline{\lambda_0}$ étant différentes, les vecteurs propres $x_0 + iy_0$ et $x_0 - iy_0$ sont donc indépendants, ce qui implique $x_0, y_0 \in \mathbf{R}^{2m}\backslash\{0\}$.
En distinguant les composantes réelles et imaginaires dans $\varphi(x_0 + iy_0)$ et $\varphi(x_0 - iy_0)$, on obtient

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \alpha y_0 + \beta x_0 \end{cases} \quad \text{où } \lambda_0 = \alpha + i\beta.$$

Les calculs donnent $\|\varphi(x_0)\|^2 + \|\varphi(y_0)\|^2 = |\lambda_0|^2 \left(\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2\right)$.
Choisissons un réel k tel que $1 < k < |\lambda_0|$. Alors l'une des inégalités $\|\varphi(x_0)\| \geq k\|x_0\|$ et $\|\varphi(y_0)\| \geq k\|y_0\|$ est vérifiée.
Ainsi l'une des deux suites $(\|\varphi^p(x_0)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ ou $(\|\varphi^p(y_0)\|)_{p\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée. φ n'est donc pas stable.

8. On note $x_1, \dots, x_{2m}$ les coodonnées de $x \in \mathbf{R}^{2m}$ dans la base canonique. Pour $R > 0$, on considère les ensembles $C_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \,/\, x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$ et $\Gamma_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \,/\, x_1^2 + x_{m+1}^2 \leq R^2\}$.
On note B la boule fermée unité.

a) On suppose $m \geq 2$.

Si $R \geq 1$, l'endomorphisme symplectique φ étudié en **7.b)** vérifie $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{2m}$. Il en résulte que $\varphi(B) \subset C_R$ (et aussi $\varphi(B) \subset \Gamma_R$).

Si $R < 1$, on considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & bI_m \\ cI_m & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, avec $b, c \in \mathbf{R}$.

D'après **2.a)** et **6.c)**, φ est symplectique si et seulement si $-bc\,{}^t I_m I_m = I_m$, c'est-à-dire $bc = -1$.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_{2m}) \in \mathbf{R}^{2m}$, le calcul donne $\varphi(x) = (bx_{m+1}, \ldots, bx_{2m}, cx_1, \ldots, cx_m)$.

Il suffit alors de choisir $0 < b \leq R$ (et c tel que $cb = -1$) pour obtenir $\varphi(B) \subset C_R$.

b) Soit φ un endomorphisme symplectique de $\mathbf{R}^n$ de matrice M dans la base canonique.

La relation matricielle ${}^t MJM = J$ se traduit par la relation $\varphi^* \circ \underline{J} \circ \varphi = \underline{J}$.

Comme φ est bijective, il existe $x, y \in \mathbf{R}^n$, uniques, tels que $\varphi(x) = e_1$ et $\varphi(y) = e_{m+1}$.

En utilisant $\underline{J}(e_1) = e_{m+1}$ et $\underline{J}(e_{m+1}) = -e_1$, on obtient $\varphi^*(e_{m+1}) = \underline{J}(x)$ et $\varphi^*(e_1) = \underline{J}(-y)$.

Notons $z = \underline{J}(x)$. L'endomorphisme $\underline{J}$ étant orthogonal (car ${}^t JJ = I_{2m}$), on en déduit les égalités

$$\|\varphi^*(e_{m+1})\| = \|z\| \text{ et } \|\varphi^*(e_1)\| = \|y\|.$$

Par ailleurs, en utilsant **6.b)** et la définition de w_0, on obtient

$$(z|y) = w_0(x, y) = w_0(\varphi(x), \varphi(y)) = w_0(e_1, e_{m+1}) = 1.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit alors qu'on ne peut pas avoir simultanément $\|\varphi^*(e_1)\| < 1$ et $\|\varphi^*(e_{m+1})\| < 1$.

Supposons que l'on ait $\|\varphi^*(e_1)\| \geq 1$.

La définition de l'adjoint donne $(\varphi^*(e_1)|x) = (e_1|\varphi(x)) = (e_1|e_1) = 1$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que $\|x\| \leq 1$.

Le vecteur normalisé $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ appartient à la boule unité B. Mais $\varphi(x') = \dfrac{1}{\|x\|} e_1$ n'appartient pas à Γ_R si $R < 1$.

On aboutit à la même conclusion lorsque $\|\varphi^*(e_{m+1})\| \geq 1$ en calculant $(\varphi^*(e_{m+1})|y)$.

Finalement, si $R < 1$, il n'existe aucun endomorphisme symplectique de $\mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(B) \subset \Gamma_R$.
