Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

1. Soit une application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Justifier que $f'(]-1,1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

Solution: Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, f' est continue. Comme $]-1,1[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est un connexe par arcs.

Par propriété du cours, $f'(]-1,1[)$ est donc un connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère l'application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) \text{ si } t \in]-1,0] \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) \text{ si } t \in]0,1[\end{cases}$$

On note pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Démontrer que f est dérivable en 0 puis sur l'intervalle $]-1,1[$.
Préciser le vecteur $f'(t)$ pour tout $t \in]-1,0]$ et pour tout $t \in]0,1[$.

Solution:

- Dérivabilité de f en 0: pour $t \in]-1,0[$, $\frac{f(t)-f(0)}{t} = (0,0) \to (0,0)$ lorsque $t \to 0^-$. Pour $t \in]0,1[$, $\frac{f(t)-f(0)}{t} = (t \sin \frac{1}{t}, t \cos \frac{1}{t}) \to (0,0)$ lorsque $t \to 0^+$.
  Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0,0)$.
- Par opération sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et de plus, pour $t \in]-1,0[$, on a $f'(t) = (0,0)$ et pour $t \in]0,1[$, on a $f'(t) = (2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, 2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t})$.

(b) Démontrer que $\forall t \in]0,1[$, $\|f'(t)\|_2 \geq 1$ et en déduire que $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$. On pourra tracer la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|.\|_2$ et on acceptera un dessin pertinent comme preuve.

Solution: Soit $t \in]0,1[$. On a

$$\begin{aligned} ||f'(t)||_2^2 &= (2t \sin \tfrac{1}{t} - \cos \tfrac{1}{t})^2 + (2t \cos \tfrac{1}{t} + \sin \tfrac{1}{t})^2 \\ &= 4t^2(\sin^2 \tfrac{1}{t} + \cos^2 \tfrac{1}{t}) + \cos^2 \tfrac{1}{t} + \sin^2 \tfrac{1}{t} \\ &\geq 4t^2 + 1 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Supposons que $f'(]-1,1[)$ soit connexe par arcs. Alors, comme $||.||_2$ est continue, $\Gamma = \{||f'(t)||_2, t \in]-1,1[\}$ est connexe par arcs et est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Or, pour tout $t \in]-1,0]$, $||f'(t)||_2 = 0$ et pour tout $t \in]0,1[$, $||f'(t)||_1 \geq 1$: c'est absurde!

EXERCICE II

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2-x-y)^2 + (1-x)^2 + (1-2x-y)^2$. On se propose de déterminer le réel $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ par deux méthodes différentes.

3. **Première méthode.**

   Déterminer le seul point critique de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer à l'aide d'une matrice Hessienne que f admet en ce point un minimum local. En admettant que ce minimum est global, donner la valeur du $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

Solution:

Comme f est polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\nabla f(x,y) = (-10 + 12x + 6y, -6 + 6x + 4y)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(x,y) est un point critique ssi $\begin{cases} -5 + 6x + 3y = 0 \\ -3 + 3x + 2y = 0 \end{cases}$ ce qui équivaut finalement à $(x,y) = (1/3, 1)$.

On a de plus $\mathrm{tr}(H_f(1/2,1)) > 0$ et $\det(H_f(1/3,1)) > 0$ donc f admet en $(1/3,1)$ un minimum local.

Si on admet que f admet un minimum global, alors f admet un minimum local et d'après ce qui précède, il est atteint en $(1/3,1)$. Ainsi,

$$\min f = f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{4}{3}$$

4. **Deuxième méthode.**

   Sur l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, on note le produit scalaire canonique par $\langle . \mid . \rangle$ et sa norme associée par $\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On note $a = (2,1,1), u = (1,1,2), v = (1,0,1)$ et $F = \mathrm{vect}\{u,v\}$. On note $b \in F$ le projeté orthogonal du vecteur a sur le sous-espace vectoriel F. Justifier que $\langle a - b \mid u\rangle = \langle a-b \mid v\rangle = 0$ et en déduire le vecteur b. Déterminer la valeur de $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

Solution: Par définition de b, on a $a - b \in F^\perp$ donc $\langle a-b|u\rangle = 0$ et $\langle a-b|v\rangle = 0$.

Notons $b = (x,y,z)$. D'après ce qu'on vient de montrer, on a

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad (1)$$

De plus, $b \in F$ et $(1,1,-1) \in F^\perp$ puisque $\langle (1,1,-1)|u\rangle = \langle (1,1,-1)|v\rangle = 0$ donc $\langle b|(1,1,-1)\rangle = 0$ ce qui donne

$$x + y - z = 0 \quad (2)$$

(1) et (2) donnent
$$b = (4/3, 1/3, 5/3).$$

Revenons à f. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = ||a - xu - yv||^2$.

Ainsi,
$$\begin{aligned} \min f &= \min\{||a - xu - yv||^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \min\{||a - f||^2, f \in F\} \\ &= ||a - b||^2 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant un résultat du cours.

Finalement, $\min f = ||a - b||^2 = ||(2/3, 2/3, -2/3)||^2 = \frac{4}{3}$.

PROBLÈME Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.

Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$, $J_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.

5. Préciser la monotonie des suites (S_n) et (J_n), puis démontrer que pour tout entier k non nul, $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k-1)$.

Solution:

- (S_n) est croissante puisque si $n \in \mathbb{N}$, alors $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geq 0$.
- (J_n) est croissante puisque si $n \in \mathbb{N}$, alors $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$ par propriété de positivité de l'intégrale.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme f est décroissante sur $[k-1, k]$, on a pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$. Par croissance de l'intégrale, on a
$$\int_{k-1}^{k} f(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)dt$$
ie
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)$$

6. Démontrer que pour tout entier n non nul, $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

Solution: En sommant les inégalités précédentes pour $k \in [\![1, n$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

et enfin, par Chasles, cela donne bien

$$S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$$

7. Démontrer enfin les deux résultats :

   (1) f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, si et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.

   (2) La série $\sum_{n\geq 1} \left[\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right]$ converge.

Solution:

(1) Supposons que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Alors, (J_n) converge donc est majorée. Donc (S_n) est aussi majorée, et comme (S_n) est croissante, on en déduit que (S_n) converge c'est-à-dire que $\sum f(n)$ converge.

Réciproquement, on suppose que $\sum f(n)$ converge. Alors, la suite de ses sommes partielles (qui est (S_n)) est convergente et donc majorée par un certain M. M majore aussi (J_n). Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)dt \leq M$. Ainsi, $x \mapsto \int_0^x f$ est croissante (se fait par exemple comme dans 5) et est majorée : elle admet donc une limite finie en $+\infty$ (par le théorème de la limite monotone). Cela prouve que $\int_0^{+\infty} f$ converge et comme f est positive, cela montre que f est intégrable.

(2) D'après 5, cette série est à termes positifs. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$ qui est le terme général d'une série convergente puisque $\sum(f(n-1) - f(n))$ est de même nature que la suite $(f(n))$ qui est convergente (d'après la théorème de la limite monotone puisque f est décroissante et minorée). Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \left[\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right]$ converge.

8. Un exemple. On pose pour $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

   (a) Étudier la monotonie de la fonction f, calculer $\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$.

Solution:
Soit x et y réels tels que $2 \leq x < y$. Alors, $\ln x < \ln y$ donc $\ln^{\alpha} x < \ln^{\alpha} y$ et finalement, $x.\ln^{\alpha} x < y \ln^{\alpha} y$ ce qui donne $f(x) > f(y)$. f est donc décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}^+$ comme c'était le cas dans les questions précédentes mais cela n'est pas gênant : tout s'applique sur $[2, +\infty[$.
Soit $x \geq 2$. Par calcul direct, on a si $\alpha = 1$,

$$\int_2^x f(t)dt = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2))$$

et si $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^x f(t)dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[\ln^{1-\alpha} t\right]_2^x = \frac{1}{1-\alpha}(\ln^{1-\alpha}(x) - \ln^{1-\alpha}(2))$$

Comme f est continue positive et décroissante, on peut appliquer la question 7 : $\sum f(n)$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} f$.

Or, pour $\alpha \leq 1$, on a $\int_2^x f(t)dt \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et pour $\alpha > 1$, $\int_2^x f(t)dt \to \frac{\ln^{1-\alpha}(2)}{\alpha-1}$.
Ainsi, $\sum f(n)$ converge ssi $\alpha > 1$.

(b) Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln 2$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Solution: En faisant $n \to +\infty$ dans la question 6 (ce qu'on peut bien faire puisque (S_n) et (J_n) convergent ici), on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} - f(2) \leq \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}}_{=\frac{1}{\ln 2}} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$$

ie

$$\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} \leq \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln^2(2)}$$

9. Une application. On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

(a) En utilisant le résultat (2) de la question Q7., établir que la suite (T_n) converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

Solution:
On prend $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{x}$. Elle est bien continue, décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On peut appliquer la question 7.
On obtient que $\sum_{k\geq 2}(\int_{k-1}^{k} f(t)dt - f(k))$ converge. Il reste juste à expliciter ses sommes partielles.
Soit $n \geq 2$. On a $\sum_{k=2}^{n}(\int_{k-1}^{k} f(t)dt - f(k)) = \sum_{k=2}^{n}(\ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k}) = -T_n$.
La série étant convergente, (T_n) converge aussi.

(b) Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Solution: D'après la question a, on a $T_n = \gamma + o(1)$ ce qui s'écrit aussi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
On obtient alors que $\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \to 1$ ie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

10. Une application sur une série de fonctions. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ où pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

(a) Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur $]0, +\infty[$.

Solution: On calcule la norme des g_n. Pour cela, on étudie leurs variations. Elles sont dérivables par opération sur les fonctions dérivables et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $g_n'(x) = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		n		$+\infty$
g_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	0

On obtient donc que pour $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est bien bornée et $||g_n||_\infty = \frac{1}{2n}$.
Selon Riemann, $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum g_n$ ne converge pas normalement.

(b) On pose pour x fixé non nul, $f(t) = \frac{x}{t^2+x^2}$.
Établir que, pour n entier non nul, $\int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$.

Solution:
f est définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
D'après la question 7, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - \underbrace{f(0)}_{=0} \leq \int_0^n f(t)dt$$

d'une part et d'autre part, en appliquant 7 à f restreinte à $[1, +\infty[$,

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

(c) En déduire que, pour tout x non nul, $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

Solution: Il s'agit de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. On peut bien le faire car :

- $\sum f(k)$ est convergente puisque c'est une série à termes positifs avec $f(k) \sim \frac{x}{k^2}$ (lorsque $k \to +\infty$) et $\sum \frac{1}{k^2}$ convergente (par Riemann).
- D'après 7, on a alors intégrabilité de f (ce qu'on peut aussi faire directement).

Finalement, un passage à la limite dans 8.(a) donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^2+x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}dt$$

Pour conclure, il reste à remarquer qu'on a $\int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}dt = [\arctan\left(\frac{t}{x}\right)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}dt = [\arctan\left(\frac{t}{x}\right)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$.

(d) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Solution: On applique le théorème des gendarmes : lorsque $x \to +\infty$, $\arctan\frac{1}{x} \to 0$ et ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \to 0$.
Si on avait convergence uniforme sur $]0,+\infty[$, on pourrait appliquer le théorème de la double limite car on aurait :

- $\sum g_n$ converge uniformément
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$

On pourrait alors conclure que $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ a une limite nulle en $+\infty$. Cela n'est pas le cas et cela démontre donc qu'on n'a pas convergence uniforme.

Partie II - Contre-exemples

11. On pose pour $x \in [1,+\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

(a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

On pourra remarquer que $\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

Solution: On a $\int_n^{n+\frac{1}{2}} |\sin(2\pi t)|dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi t)dt = \frac{1}{2\pi}[-\cos(2\pi t)]_n^{n+1/2} = \frac{1}{\pi}$ et $\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} |\sin(2\pi t)|dt = -\int_{n+1/2}^{n+1} \sin(2\pi t)dt = \frac{1}{2\pi}[\cos(2\pi t)]_{n+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\pi}$.
Finalement,

$$\int_n^{n+1} f(t)dt = \frac{2}{\pi}.$$

(b) Établir que pour $x \in \left[1,+\infty\right[$, $\int_1^x |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t \geq \frac{2}{\pi}(\lfloor x \rfloor - 1)$.

La fonction f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? Que dire de la nature de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$?

Solution: On a $\int_1^x |\sin(2\pi t)|dt \geq \int_1^{\lfloor x \rfloor} |\sin(2\pi t)|dt$ et, par Chasles,
$\int_1^{\lfloor x \rfloor} |\sin(2\pi t)|dt = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} |\sin(2\pi t)|dt = \frac{2}{\pi}(\lfloor x \rfloor - 1)$.
Lorsque $x \to +\infty$, on a $\lfloor x \rfloor \to +\infty$ donc $\int_1^x f(t)dt \to +\infty$ et cela montre que $\int_1^{+\infty} f$ diverge et donc que f n'est pas intégrable.
En revanche, la série $\sum f(n)$ est bien convergente puisque de terme général nul.

12. On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1,+\infty[$ telle que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ diverge.

Pour tout entier n non nul, trouver un réel a_n de sorte que le triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\frac{1}{n^2}$.

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction f définie et continue sur $[1,+\infty[$ de la manière suivante : chaque entier naturel n non nul a pour image 1 et autour de chaque n (sur chaque intervalle $[n-a_n, n+a_n]$) tracer l'allure du triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 . Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles $[n-a_n, n+a_n]$.

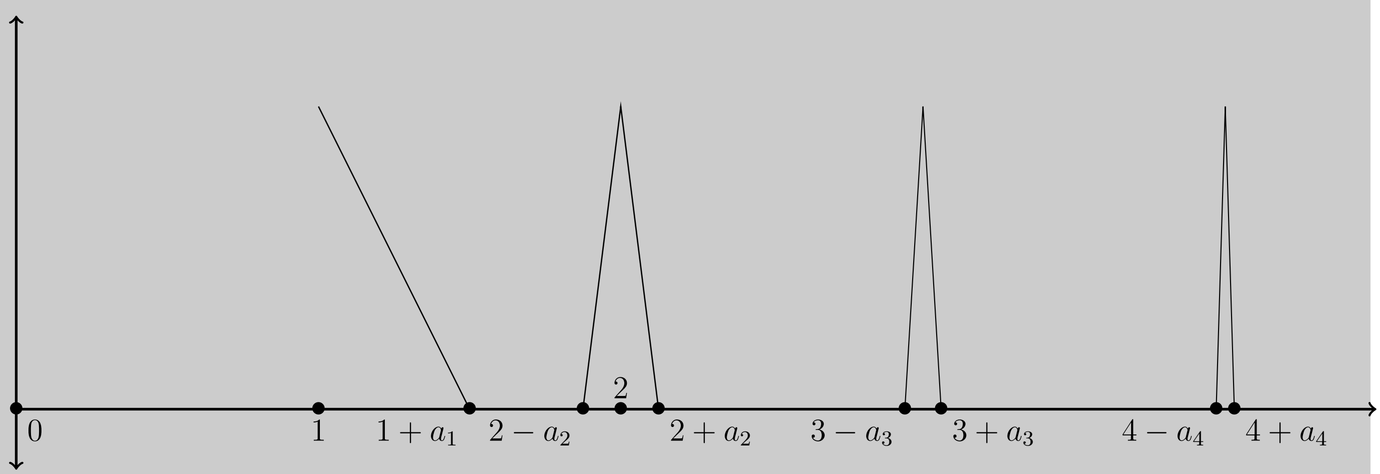
Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

Solution: Pour n non nul, on pose $a_n = \frac{1}{2n^2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 a bien pour aire $\frac{1}{2n^2}$ (avec $\frac{1}{n^2}$ comme aire, les deux premiers triangles posent problème).

On constate que les segments $[n - a_n, n + a_n]$ sont deux à deux disjoints et on définit f par morceaux ainsi :

- on pose f nulle sur $[1, +\infty[\setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} [k - a_k, k + a_k]$,
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, f est affine sur $[k, k + a_k]$ avec $f(k) = 1$ et $f(k + a_k) = 0$
- pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, f est affine sur $[k - a_k, k]$ avec $f(k - a_k) = 0$ et $f(k) = 1$.

Graphiquement, ça donne ceci :



Vérifions qu'on a bien obtenu ce qu'on veut :

- comme pour tout n, $f(n) = 1$, on a divergence grossière de $\sum f(n)$.
- f est bien positive et continue
- f est intégrable puisque : $x \mapsto \int_1^x f$ est croissante (car f positive) et majorée car pour $x \geq 1$, $\int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{\lfloor x \rfloor + a_{\lfloor x \rfloor}} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k^2}$ et, la série $\sum \frac{1}{k^2}$ étant convergente, sa somme est un majorant de $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ qui admet donc une limite finie en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone.

FIN