

Concours Communs Polytechniques 2013

Épreuve de Mathématiques n°1 – TSI

Exercice 1

1. a) On a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^3}{12}$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
 b) L'application f est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1 = \frac{1}{4}(x-2)(x+2)$$

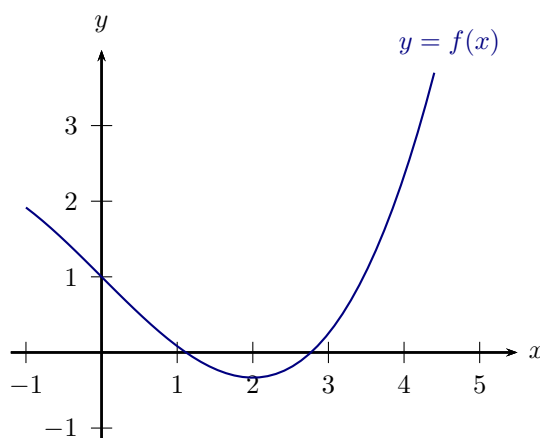
Ainsi, $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [0; 2]$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [2; +\infty[$.

D'où les variations de f :

x	0	β	2	γ	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	1				$+\infty$

$\swarrow$ 0 $\searrow$ $-\frac{1}{3}$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$

2. a) D'après le tableau de variations, f étant continue et changeant de signe à deux reprises sur les intervalles $[0; 2]$ et $[2, +\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires indique que la fonction s'annule deux fois sur $[0; +\infty[$.
 b) $f(\beta) = 0$ donc $\frac{\beta^3}{12} - \beta + 1 = 0$, ce qui donne $1 + \frac{\beta^3}{12} = \beta$.
 c) D'après la calculatrice, $f(1) > 0$ et $f(1,2) < 0$ donc $\beta \in]1; 1,2[$.
 De même, $f(2,7) < 0$ et $f(2,8) > 0$ donc $\gamma \in]2,7; 2,8[$.
 REMARQUE : Maple donne $\beta = -2 \sin\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) \approx 1,1157$.
 d) f est donc à valeurs positives sur les intervalles $[0; \beta]$ et $[\gamma; +\infty[$, à valeurs négatives sur l'intervalle $[\beta; \gamma]$.
3. Voici le graphe représentatif de f :



On notera la présence d'une tangente horizontale au point de coordonnées $(2, -\frac{1}{3})$.

4. a) Tout d'abord, $u_1 = \frac{13}{12} < \beta$.
 Raisonnons par récurrence pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0; \beta]$.

★ Initialisation

La propriété est vraie pour $n = 0$ (et même pour $n = 1$).

★ Hérédité

Supposons la propriété vraie à un rang n donné, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq \beta$.

u_{n+1} est clairement positif et :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12} \leq 1 + \frac{\beta^3}{12} = \beta$$

C'est ce que l'on souhaitait démontrer.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie quel que soit l'entier n .

b) On a directement $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^3}{12} - u_n + 1 = f(u_n)$.

Comme f est à valeurs positives sur $[0; \beta]$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par β donc elle converge vers un réel $\ell \in [0; \beta]$ à déterminer. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on trouve $\ell = 1 + \frac{\ell^3}{12}$.

Cette équation admet une seule solution sur l'intervalle $[0; \beta]$ et on a ainsi $\ell = \beta$.

d) Voici deux propositions de procédures Maple permettant de calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la première étant sans doute la plus adaptée au problème.

★ Procédure récursive

```
[> u:=proc(n)
    if n=0 then 1 else u(n-1)^3/12+1 fi;
end proc;
```

★ Procédure itérative

```
[> u:=proc(n)
    local i,x;
    x:=1;
    for i from 1 to n do
        x:=x^3/12+1
    od;
    x;
end proc;
```

Testons la procédure :

```
[> evalf(u(7));
```

```
1.115721147
```

On notera que la convergence vers β est très rapide : $u_7 \approx \beta$ à 10^{-4} près.

Exercice 2

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

De plus, on vérifie facilement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x^2 f''(x) - x(2x^2 - 1)f'(x) - (2x^2 + 1)f(x) = 0$$

Donc f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation (E).

2. a) y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - R; R[$ et dérivable terme à terme comme somme de série entière.

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}; \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

- b) En injectant dans l'équation (E), on obtient :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (E)} &\iff x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x(2x^2 - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (2x^2 + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - (2x^2 - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - (2x^2 + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} [(n^2 - 1) a_n - 2(n-1) a_{n-2}] x^n - a_0 = 0 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en séries entières :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad (n^2 - 1) a_n - 2(n-1) a_{n-2} = 0 \text{ et } a_0 = 0.$$

En simplifiant par $n-1$ (non nul), on obtient : $\forall n \geq 2, a_n = \frac{2}{n+1} a_{n-2}$ et $a_0 = 0$.

- c) $a_2 = 0$ et on montre plus généralement, par récurrence, que $a_{2p} = 0$ pour tout entier naturel p .
d) Pour tout entier naturel non nul p ,

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{2}{2p+2} a_{2p-1} = \frac{1}{p+1} a_{2p-1} \\ &= \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot a_{2p-3} = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot a_{2p-5} \\ &= \dots = \frac{a_1}{(p+1)!} \end{aligned}$$

3. Utilisons la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

Posons $u_p = \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$. Alors,

$$\left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| = \left| \frac{x^{2p+3}}{(p+2)!} \frac{(p+1)!}{x^{2p+1}} \right| = \frac{x^2}{p+2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$ vaut $+\infty$.

4. Pour tout réel x , $e^x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!}$ et $e^{x^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p!}$. Les rayons de convergence sont infinis.

5. Tout d'abord, $g(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{0^{2p+1}}{(p+1)!} = 0$. De plus,

$$g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p-1}}{p!} = \frac{1}{x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p!} = \frac{1}{x} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p!} - 1 \right]$$

D'où $g(x) = \frac{1}{x}(e^{x^2} - 1)$.

6. Les coefficients de l'équation définissant des fonctions continues sur $]0; +\infty[$ et x^2 ne s'annulant pas, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre (E) est **un plan vectoriel**.

Nous avons montré que f et g sont des solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ et la famille (f, g) étant libre, elle forme une base de $\mathcal{S}$, donc toutes les solutions sont de la forme :

$$y(x) = \frac{1}{x}(\alpha + \beta e^{x^2}); \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

7. Toute solution sur $\mathbb{R}$ doit être de la forme :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\alpha_1 + \beta_1 e^{x^2}) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x}(\alpha_2 + \beta_2 e^{x^2}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$$

y doit également être deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour que y soit définie et continue en 0, on doit avoir $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 0$.

Sous cette condition, un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donne :

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{=} \frac{\alpha_1}{x}(1 - (1 + x^2 + o(x^3))) = -\alpha_1 x + o(x^2)$$

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{\alpha_2}{x}(1 - (1 + x^2 + o(x^3))) = -\alpha_2 x + o(x^2)$$

On trouve alors par unicité du développement limité $\alpha_1 = \alpha_2$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme :

$$y(x) = \alpha \frac{1 - e^{x^2}}{x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

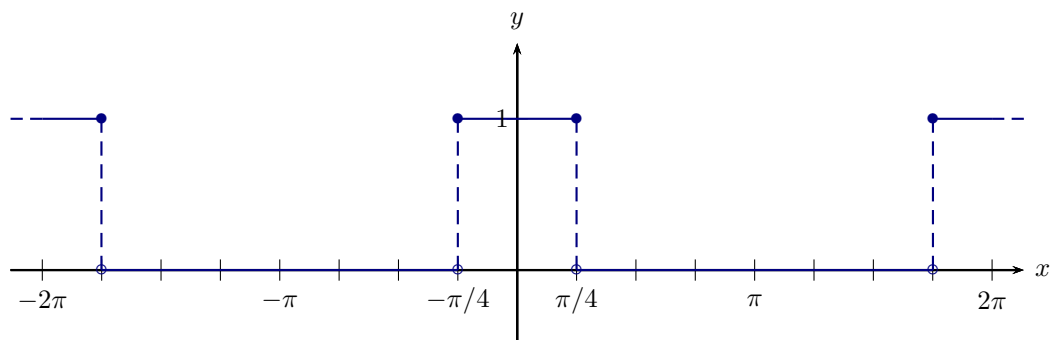
Problème

Partie A

1. Les séries $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent alors que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
2. Comme $0 \leq \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ converge.

Partie B

1. Voici le graphe représentatif de f :



2. La fonction f étant paire, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls.

De plus, $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{\alpha}{\pi}$ et de même,

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\alpha} \cos(nx) dx = \frac{2}{n\pi} \sin(n\alpha)$$

3. La fonction f étant continue par morceaux, le théorème de Parseval s'applique et donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = a_0^2(f) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)),$$

soit $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$, mais encore :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$$

4. Pour $\alpha = 1$, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Partie C

1. Un simple équivalent nous donne $h(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$ donc $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^*} 1$.

La fonction h étant prolongable par continuité sur $[0; 1]$, l'intégrale $\int_0^1 h(x) dx$ est *faussement* impropre, elle converge.

2. L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

Comme pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ converge par comparaison.

Le résultat de la question précédente nous permet alors d'affirmer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ converge.

3. h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et :

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad h'(x) = (x \cos(x) - \sin(x)) \frac{2 \sin(x)}{x^3}.$$

4. On a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} |x\sqrt{x}h'(x)| &= \left| x\sqrt{x}(x \cos(x) - \sin(x)) \frac{2 \sin(x)}{x^3} \right| \leq \frac{2}{x\sqrt{x}} |x \cos(x) - \sin(x)| \\ &\leq \frac{2}{x\sqrt{x}} (|x \cos(x)| + |\sin(x)|) \quad (\text{d'après l'inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{2}{x\sqrt{x}} (x + 1) \end{aligned}$$

Donc après simplifications, $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$.

Mais on a également :

$$|x\sqrt{x}h'(x)| = \left| x\sqrt{x}(x \cos(x) - \sin(x)) \frac{2 \sin(x)}{x^3} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} |x \cos(x) - \sin(x)|$$

car $|\sin(x)| \leq x$ comme le rappelle l'énoncé.

De plus, $|x \cos(x) - \sin(x)| \leq x + |\sin(x)| \leq 2x$, ce qui donne au final, $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq 4\sqrt{x}$.

5. Comme $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq 4\sqrt{x}$, pour $x \leq 1$, on a $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq 4$ et donc $|h'(x)| \leq \frac{4}{x\sqrt{x}}$.

De plus, pour $x \geq 1$, $|x\sqrt{x}h'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}} \leq 2 + 2 = 4$ et on retrouve $|h'(x)| \leq \frac{4}{x\sqrt{x}}$.

Au final, quel que soit $x > 0$, $|h'(x)| \leq \frac{4}{x\sqrt{x}}$.

6. Considérons l'intégrale $\int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt$ et effectuons un changement de variable en posant $x = n\alpha + t$ (changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt = \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

Ainsi, grâce à la relation de Chasles,

$$\sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt = \sum_{n=1}^N \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt &= \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt - \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} dt \\ &= \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt - \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \end{aligned}$$

En sommant, on obtient à l'aide du résultat précédent :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt &= \sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \\ &= \int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \end{aligned}$$

On a donc bien montré que :

$$\int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt$$

7. Rappelons que si h est continue et dérivable sur un intervalle I , alors :

$$\forall x, y \in I \quad \exists c \in]x; y[\quad h(y) - h(x) = h'(c)(y - x)$$

Il s'agit du théorème des accroissements finis. On peut appliquer ce résultat sur l'intervalle $]0; +\infty[$ en posant $x = n\alpha$ et $y = n\alpha + t$ qui sont deux éléments de I , pour $t \in [0; \alpha]$. On a alors :

$$\left| \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| = |h'(c)|t \leq \frac{4t}{c\sqrt{c}}$$

avec $c \in]n\alpha; n\alpha + t[$ d'après la question 5. Enfin, comme $c \geq n\alpha$,

$$\left| \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \leq \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}$$

8. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors :

$$\int_0^\alpha \left| \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| dt \leq \int_0^\alpha \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}} dt = \frac{2\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}}$$

Il ne reste plus qu'à sommer les inégalités pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

9. Tout d'abord, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left| \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| dt \\ &\leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sqrt{n}} \end{aligned}$$

en appliquant successivement l'inégalité triangulaire, l'inégalité de la moyenne puis le résultat de la question précédente.

Les séries et l'intégrale apparaissant dans l'expression précédente étant toutes convergentes, on peut passer à la limite. Comme on a montré que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$, on obtient :

$$\left| \int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - \frac{\pi - \alpha}{2} \right| \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

En faisant alors tendre α vers 0, on obtient finalement (théorème de comparaison) :

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \left[\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - \frac{\pi - \alpha}{2} \right] = 0 \text{ soit } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

FIN DE L'ÉPREUVE