

1. Classique.
2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $0 < \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. C'est-à-dire

$$S = P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot P^T$$

avec $P \in O_n(\mathbb{R})$. Posons $R = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^T$. Donc, $R \in GL_n(\mathbb{R})$ ($0 \notin \text{spectre}(R)$) et

$$S = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2 P^T = R^2 = R^T \cdot R.$$

avec qui est inversible. Réciproquement, si $S = R^T R$ avec $R \in GL_n(\mathbb{R})$ alors S est bien symétrique et pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle on a:

$$X^T S X = (R X)^T \cdot (R X) = \|R X\|^2 > 0$$

Car R est inversible. Ce qui montre que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Si $\lambda \in [0, 1]$ et $S_1, S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $R = \lambda S_1 + (1 - \lambda) S_2 \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, comme $X^T S_1 X > 0$ et $X^T S_2 X > 0$, alors

$$X^T R X = \lambda X^T S_1 X + (1 - \lambda) X^T S_2 X > 0.$$

Ce qui montre que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

4. On admet que $x \in \text{Conv}(K)$ ssi il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in H$ et $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in K$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Posons $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \longrightarrow E$ définie par

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

Alors ϕ est continue, (ϕ est $2n$ -linéaire) sur $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ et $\text{conv}(K) = \phi(H \times K^{n+1})$.

L'ensemble $S = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$ est fermé comme image réciproque de $\{1\}$

par l'application: $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$, donc $H = S \cap [0, 1]^{n+1}$ est un fermé inclus dans

le compact $[0, 1]^{n+1}$. Par suite H est un compact de \mathbb{R}^{n+1} . On en déduit que $\text{conv}(K)$ est un compact comme image du compact $H \times K^{n+1}$ par l'application continue ϕ . On rappelle, que le produit fini des compacts est un compact.

5. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthonormée de E . Soit $2 \leq i \leq n$. Comme $\langle e_1 + e_i, e_1 - e_i \rangle = 0$ et $\langle e_1, e_i \rangle = 0$,

$$\|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2 = \langle g(e_1) + g(e_i), g(e_1) - g(e_i) \rangle = 0$$

Ce qui montre que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $\|g(e_i)\| = \|g(e_1)\| = k$. Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$. On utilisons le fait que $\langle g(e_i), g(e_j) \rangle = 0$ pour $i \neq j$ on obtient,

$$\|g(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i g(e_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|g(e_i)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = k^2 \|x\|^2.$$

Par suite $\|g(x)\| = k \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Si $k = 0$ alors $g = 0$ et donc g est la composée de l'homothétie de rapport 0 et n'importe quel endomorphisme orthogonal.

Si $k > 0$. On pose $g_1 = \frac{1}{k}g$, alors g_1 est orthogonale, puisque $\|g_1(x)\| = \|x\|$ pour tout x , et $g = g_1 \circ h_k$ avec h_k est l'homothétie de rapport k .

6. Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $f : M \rightarrow M.M^T$ (chaque composante de $f(M)$ est polynomiale en coefficients de la matrice M). Pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|A\|^2 = \text{Tr}(A^T A) = n.$$

Ce qui montre que $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{B}(0, \sqrt{n})$ donc bornée. Par suite $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$ qui est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$, donc compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

7. Supposons qu'il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur $a \in E$. Par définition, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_{n_k} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $k \geq k_0$. Choisissons deux entiers distincts $k, k' \geq k_0$, alors

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k'}}\| \leq \|x_{n_k} - a\| + \|x_{n_{k'}} - a\| < \varepsilon$$

ce qui contredit l'hypothèse.

8. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p > 0$ et pour tous $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$, $K \not\subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$.

On peut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de K telle que $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ pour tout $n \neq m$. En effet, soit $x_0 \in K$. Supposons que $x_0, x_1, \dots, x_n \in K$ ainsi construite (tel que $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ pour tout $0 \leq i \neq j \leq n$). Comme $K \not\subset \bigcup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon)$, il existe

donc, un vecteur $x_{n+1} \in K$ et $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon)$ c'est-à-dire, $\|x_{n+1} - x_j\| \geq \varepsilon$ pour tout $0 \leq j \leq n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas une sous suite convergente (Question 7). Contradiction, par compacité de K .

9. On raisonne par l'absurde, on supposons que pour tout $\alpha > 0$ il existe $x_\alpha \in K$ tel que pour tout $i \in I$, $B(x_\alpha, \alpha) \not\subset \Omega_i$. Pour $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in K$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \Omega_i$ pour tout $i \in I$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur $a \in K$. Il existe i_0 tel que $a \in \Omega_{i_0}$. On peut trouver une boule $B(a, r) \subset \Omega_{i_0}$. La convergence de $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ vers a entraîne qu'il existe k_1 tel que $x_{n_k} \in B(a, \frac{r}{2})$ pour tout $k \geq k_1$. Soit $k_2 \geq k_1$ tel que $\frac{1}{n_{k_2}} < \frac{r}{2}$. Alors

$$B(x_{n_{k_2}}, \frac{1}{n_{k_2}}) \subset B(x_{n_{k_2}}, \frac{r}{2}) \subset B(a, r) \subset \Omega_{i_0}$$

Ce qui contredit la construction de $x_{n_{k_2}}$.

Le réel $\alpha > 0$ étant fixé tel que pour tout $x \in E$ il existe i_x tel que $B(x, \alpha) \subset \Omega_{i_x}$. D'après la question 8, il existe x_1, x_2, \dots, x_p dans K tel que $K \subset \bigcup_{j=1}^p B(x_j, \alpha)$. Comme

chaque boule $B(x_j, \alpha) \subset \Omega_{i_{x_j}}$, on obtient $K \subset \bigcup_{j=1}^p \Omega_{i_{x_j}}$.

10. Si $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, par passage au complémentaire, $E = \bigcup_{i \in I} F_i^c$, donc $K \subset \bigcup_{i \in I} F_i^c$. D'après question 9, il existe $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_p}$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^p F_{i_j}^c = (\bigcap_{i=1}^p F_{i_j})^c$. Par suite $\bigcap_{i=1}^p F_{i_j} \subset K^c \cap K = \emptyset$.

11. Pour $x \in E$, l'application: $u \longrightarrow \|u(x)\|$ est continue comme composée de deux applications continues ($u \longrightarrow u(x)$ et $y \longrightarrow \|y\|$). Comme G est un compact, il existe $u_x \in G$ tel que $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\| = \|u_x(x)\|$. Ce qui montre que N_G est bien définie. D'autre part $N_G(x) = 0$ ssi $u_x(x) = 0$ ssi $x = 0$ puisque $u_x \in GL(E)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$,

$$N_G(\lambda x) = \sup_{u \in G} \|u(\lambda x)\| = \sup_{u \in G} |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| N_G(x).$$

Si $x, y \in E$ et $u \in G$, alors

$$\|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y).$$

Par suite $N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)$ par passage au sup. Ce qui montre que N_G est une norme.

12. • Soit $u \in G$, le fait que G est un groupe et $u \in GL(E)$ montre que l'application $v \longrightarrow v \circ u$ est une permutation de G . Par suite,

$$N_G(u(x)) = \sup_{v \in G} \|v \circ u(x)\| = \sup_{v \in G} \|v(x)\| = N_G(x).$$

- Soient $x, y \in E$. Par continuité de l'application $u \longrightarrow \|u(x+y)\|$ sur le compact G , il existe $u_{x+y} \in G$ tel que

$$\begin{aligned} N_G(x+y) &= \|u_{x+y}(x+y)\| \leq \|u_{x+y}(x)\| + \|u_{x+y}(y)\| \\ &\leq N_G(x) + N_G(y). \end{aligned}$$

On aura égalité si

$$\|u_{x+y}(x+y)\| = \|u_{x+y}(x)\| + \|u_{x+y}(y)\| = \|u_{x+y}(x) + u_{x+y}(y)\|.$$

Comme $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, $u_{x+y}(x)$ et $u_{x+y}(y)$ sont positivement liées, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$u_{x+y}(y) = \lambda u_{x+y}(x).$$

Par suite $y = \lambda x$ par injectivité de u_{x+y} .

Inversement, supposons que $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors:

$$\begin{aligned} N_G(x+y) &= (\lambda+1)N_G(x) = N_G(\lambda x) + N_G(x) \\ &= N_G(y) + N_G(x). \end{aligned}$$

13. Soit $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, x_n est une combinaison convexe des vecteurs de K , donc $x_n \in K$ par convexité de K . La compacité de K entraîne l'existence d'une valeur d'adhérence $a \in K$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. D'autre part,

$$u(x_n) - x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^{i+1}(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) = \frac{1}{n} (u^n(x) - x),$$

donc

$$\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n} \|u^n(x) - x\| \leq \frac{\delta(K)}{n}.$$

Soit $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous suite de (x_n) qui converge vers $a \in K$. D'après l'inégalité précédente, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u(x_{n_k}) - x_{n_k}\| = 0,$$

d'autre part, par continuité de u et de l'application norme,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u(x_{n_k}) - x_{n_k}\| = \|u(a) - a\|.$$

Par unicité de la limite, on a $u(a) = a$, donc u admet un point fixe dans K .

14. Pour tout $x \in K$ on a: $u(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(x) \in K$ et $u_i(x) \in K$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Comme K est convexe, on en déduit que $u(x) \in K$, donc K est stable par u . D'après la question 13, u admet un point fixe $a \in K$.

15. En utilisons la question (12- premier point) on a:

$$N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(u(a)) = N_G(a) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(a) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)).$$

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. On a

$$\begin{aligned} N_G(u_j(a) + \sum_{i=1, i \neq j}^r u_i(a)) &\leq N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{i=1, i \neq j}^r u_i(a)\right) \leq N_G(u_j(a)) + \sum_{i=1, i \neq j}^r N_G(u_i(a)) \\ &= \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(u_j(a) + \sum_{i=1, i \neq j}^r u_i(a)). \end{aligned}$$

16. Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. D'après les question 15 et 12, il existe un réel positif λ_j tel que

$$\sum_{i=1, i \neq j}^r u_i(a) = \lambda_j u_j(a). \text{ Donc}$$

$$u(a) = \frac{1}{r}(u_j(a) + \sum_{i=1, i \neq j}^r u_i(a)) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a).$$

17. Soit $j \in \{1, \dots, r\}$,

$$N_G(a) = N_G(u(a)) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G(u_j(a)) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G(u_j(a)) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G(a).$$

Par suite $\frac{\lambda_j + 1}{r} = 1$, et a est un point fixe de u_j .

18. Soit, pour tout $u \in G$

$$F_u = \{x \in K : u(x) = x\} = K \cap \ker(u - id).$$

Chaque F_u est un fermé contenu dans K (puisque $u - id$ est continue). Si $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$ alors d'après la question 10, il existe $u_1, u_2, \dots, u_k \in G$ tels que $F_{u_1} \cap F_{u_2} \cap \dots \cap F_{u_k} = \emptyset$ c'est-à-dire que u_1, u_2, \dots, u_k n'ont pas un point fixe commun, contradiction d'après la question 17. Donc, il existe $a \in \bigcap_{u \in G} F_u$ ce qui implique que $a \in K$ et $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.

19. La matrice A est inversible. Il est simple de voir que l'endomorphisme ρ_A est injective, puisque par exemple $rg(\rho_A(M)) = rg(M)$. Par suite $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$.

L'application $\rho : G \longrightarrow GL(M_n(\mathbb{R}))$ définie par $\rho(A) = \rho_A$ est un morphisme de groupe puisque $\rho_{A.B} = \rho_A \circ \rho_B$. Donc $H = \rho(G)$ est un sous groupe. L'application ρ est continue, en effet. On écrit $\rho = \phi \circ \varphi$ avec ϕ et φ sont les applications définies par $\phi : M_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow L(M_n(\mathbb{R})) : \phi(A, B)(M) = A^T M B$ et $\varphi : G \longrightarrow M_n(\mathbb{R})^2 : \varphi(A) = (A, A)$. L'application ϕ est bilinéaire en dimension fini donc continue, de même l'application φ est continue comme restriction d'une application linéaire. Par suite H est compact comme image du compact G par l'application continue ρ .

20. L'application $f : M \longrightarrow M^T M$ est continue donc $\Delta = f(G)$ est un compact. D'après la question 2 $\Delta \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$. L'enveloppe convexe d'un compact en dimension finie est compact, d'après la question 4, donc $K = \text{Conv}(\Delta)$ est compact. Le fait que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe et que $\Delta \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ entraînent que $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Soit $A \in G$ et $M = N^T N \in \Delta$ (avec $N \in G$), alors $\rho_A(M) = (AN)^T . AN \in \Delta$ puisque $AN \in G$. Ce qui montre que $\rho_A(\Delta) \subset \Delta$. Comme ρ_A est linéaire on en déduit que $\rho_A(\text{Conv}(\Delta)) \subset \text{Conv}(\Delta) = K$. Ce qui montre que K est stable par tous les éléments de H .

21. Comme K est un compact convexe, H est un sous groupe compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$ et K stable par tous les éléments de H , on en déduit, d'après la question 18 qu'il existe

$M \in K$ tel que $\rho_A(M) = M$ pour tout $A \in G$.

Comme $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = N^T N$. Alors, pour tout $A \in H$,

$$\rho_A(M) = (AN)^T \cdot AN = N^T N$$

donc $(N.A.N^{-1})^T \cdot (NAN^{-1}) = I_n$. Ce qui montre que $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout $A \in G$. Posons

$$G_1 = N.G.N^{-1} = \{NAN^{-1} : A \in G\}$$

alors G_1 est un sous groupe (image du sous groupe G par le morphisme de groupe $M \longrightarrow N^{-1}MN$) de $O_n(\mathbb{R})$. En fait, on a montré que tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

22. Soit $h = g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$. On a

$$h^2 = g \circ \sigma_p^2 \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$$

donc h est une symétrie. Si S est la matrice de σ_p dans la base canonique, $S \in O_n(\mathbb{R})$, alors la matrice de h dans la base canonique est

$$NSN^{-1} \in N.O_n(\mathbb{R}).N^{-1} \subset NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R}).$$

Donc, h est orthogonal.

L'application h est une symétrie orthogonale. Pour tout $x = g(y) \in g(P)$ avec $y \in P$,

$$h(x) = g \circ \sigma_p(y) = g(y) = x.$$

Par suite $g(P) \subset \ker(h - id)$. De plus, comme g est un isomorphisme, $\dim g(P) = \dim P = n - 1$, et $h \neq id$ donc $\ker(h - id) = g(P)$. Ce qui montre que $h = \sigma_P$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $P = \text{vect}(x)^\perp$. Pour tout $y \in \text{vect}(x)^\perp$ on a

$$\sigma_{g(P)}(g(y)) = g(y)$$

et

$$\sigma_{g(P)}(g(x)) = g \circ \sigma_P(x) = -g(x).$$

On obtient,

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle \sigma_{g(P)}g(x), \sigma_{g(P)}(g(y)) \rangle = -\langle g(x), g(y) \rangle,$$

donc $\langle g(x), g(y) \rangle = 0$. Ce qui montre que g conserve l'orthogonalité. D'après la question 5, g s'écrit alors $g = h_\lambda \circ u$ avec u orthogonale et h_λ une homothétie de rapport λ strictement positif. Donc la matrice de g , $N = \lambda O$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in K$ alors $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, donc $OAO^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, par suite $A \in O_n(\mathbb{R})$, puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe. Finalement $K \subset O_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \subset K$ ce qui donne $K = O_n(\mathbb{R})$.

Conclusion: $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.