

Partie A : un arc de cercle apparent

1. On a $d(O, M(\theta)) = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$ donc $M(\theta)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.
2. (a) Comme $a \in]1, +\infty[$, on a $\frac{1}{a} \in]0, 1[$. Comme Arccos réalise une bijection (continue et strictement décroissante) entre $]0, 1[$ et $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit l'existence de ω avec $\omega \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
- (b) Les coordonnées de $\overrightarrow{OM(\omega)}$ sont :

$$\begin{aligned} x_M &= \cos(\omega) = \cos\left(\text{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} \\ y_M &= \sin(\omega) = \sin\left(\text{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{1 - \cos^2\left(\text{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2\left(\text{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right)} \quad \left(\sin(\omega) > 0 \text{ car } a \in]0, \frac{\pi}{2}[\right) \end{aligned}$$

Après simplification on obtient :

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{a} \\ y_M = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{cases}$$

D'où les coordonnées de $\overrightarrow{AM(\omega)}$:

$$\begin{cases} x_M - x_A = \cos(\omega) - a = \frac{1}{a} - a = \frac{1}{a}(1 - a^2) \\ y_M - y_A = \sin(\omega) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{cases}$$

- (c) On vient de voir que $\cos(\omega) = \frac{1}{a}$, ce qui donne immédiatement :

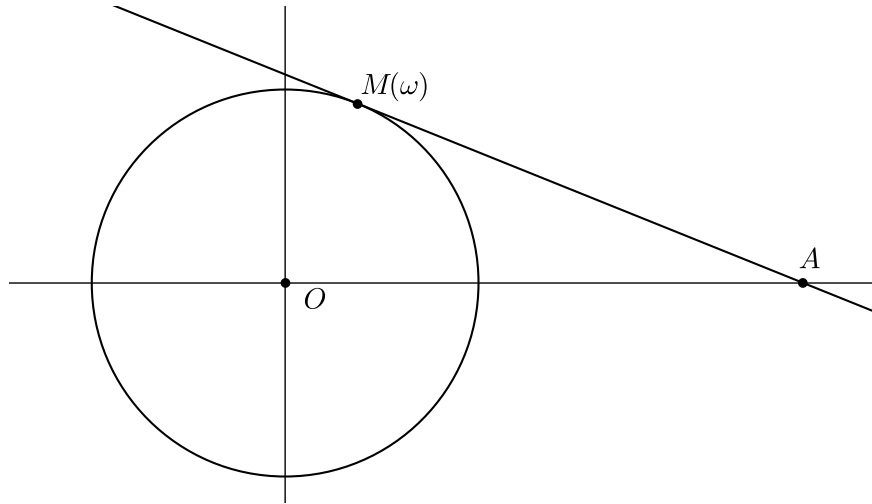
$$a = \frac{1}{\cos(\omega)}$$

- (d) Pour vérifier que $(AM(\omega))$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$, nous allons démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM(\omega)}$ et $\overrightarrow{OM(\omega)}$ sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AM(\omega)} \cdot \overrightarrow{OM(\omega)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}(1 - a^2) \\ \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}(1 - a^2) + \frac{1}{a^2}(a^2 - 1) = 0$$

Ainsi,

$$(AM(\omega)) \text{ est tangente au cercle } \mathcal{C}$$



3. (a) Comme $\cos(x) \in]-1, 1[$ et $a > 1$, on a toujours $\cos(x) - a < 0$. Le quotient a donc bien un sens et

f est définie sur $\mathbb{R}$

Par ailleurs, les fonctions $\cos$ et $\sin$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), on en déduit par opérations algébriques que

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x) - a} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x) - a} = -f(x)$$

Ainsi,

f est impaire

Remarque. On peut donc réduire l'étude de f à $\mathbb{R}^+$. On obtiendra ensuite toute la courbe en faisant une symétrie par rapport à l'origine.

- (c) On dérive comme un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)[\cos(x) - a] - \sin(x)[- \sin(x)]}{(\cos(x) - a)^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) - a \cos(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x) - a)^2} \\ &= \boxed{\frac{1 - a \cos(x)}{(\cos(x) - a)^2}} \end{aligned}$$

- (d) Le dénominateur étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - a \cos(x)$, c'est à dire celui de $\frac{1}{a} - \cos(x)$. La fonction $\cos$ étant décroissante sur $[0, \pi]$, pour tout $x \in [0, \pi]$, on

a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} - \cos(x) > 0 &\iff \frac{1}{a} > \cos(x) \\ &\iff \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right) < x \\ &\iff \omega < x\end{aligned}$$

Ainsi,

f est strictement décroissante sur $[0, \omega]$ et strictement croissante sur $[\omega, \pi]$.

(e) En complétant par imparité, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$	$-\omega$	0	ω	π
$f(x)$	0	$-f(\omega)$	0	$f(\omega)$	0

4. La droite verticale passant par A ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$ (car la distance entre cette droite et $\mathcal{C}$ vaut $a - 1 > 0$). Toutes les autres droites passant par A ont une équation de la forme $y = mx + p$, ce qui est le cas de la droite $\mathcal{D}$. Comme elle passe par A on a $y_A = mx_A + p$ ce qui donne facilement $p = -ma$. La droite $\mathcal{D}$ a donc une équation de la forme :

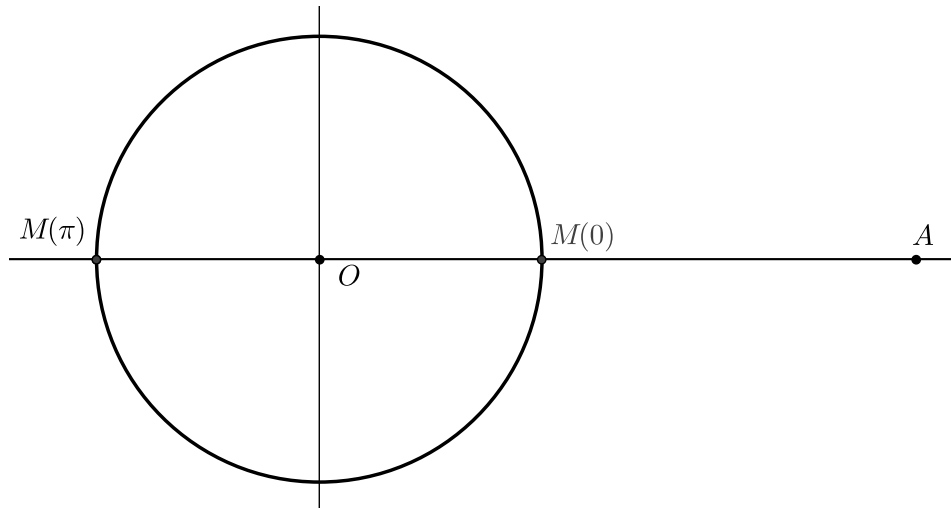
$$y = m(x - a) \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

5. Pour tout $(m, \theta) \in \mathbb{R}^2$ on a les équivalences suivantes :

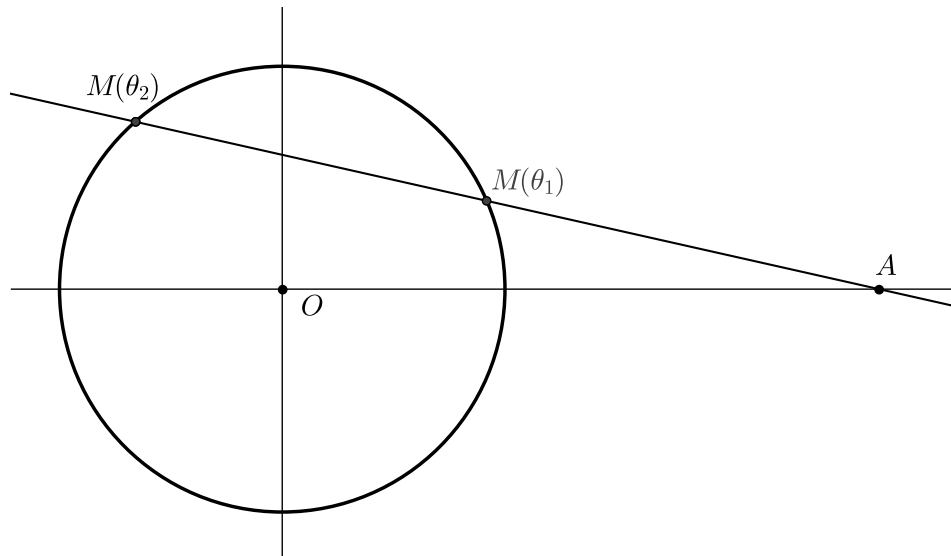
$$\begin{aligned}M(\theta) \in \mathcal{D}_m &\iff \sin(\theta) = m(\cos(\theta) - a) \\ &\iff m = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - a} \\ &\iff m = f(\theta)\end{aligned}$$

6. Le point $M(0)$ a pour coordonnées $(1, 0)$ et le point $M(\pi)$ a pour coordonnées $(-1, 0)$. Ces deux points sont évidemment sur la droite $\mathcal{D}_0$ d'équation $y = 0$. Ces deux points sont les seuls points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_0$. Comme $-1 \leq 1$ (abscisses des deux points), on en déduit, par définition, que :

$M(0)$ est visible du point A alors que $M(\pi)$ ne l'est pas



7. (a) Notons $m = f(\theta_1) = f(\theta_2)$. D'après le résultat de la question 5, on a d'une part $m = f(\theta_1)$ donc $M(\theta_1) \in \mathcal{D}_m$ et d'autre part $m = f(\theta_2)$ donc $M(\theta_2) \in \mathcal{D}_m$. Comme par définition on a aussi $A \in \mathcal{D}_m$, la droite $\mathcal{D}_m$ contient les trois points A , $M(\theta_1)$ et $M(\theta_2)$ ce qui prouve qu'ils sont alignés.
- (b) D'une part $M(\theta_1)$ et $M(\theta_2)$ sont les deux seuls points d'intersection de la droite $\mathcal{D}_m$ avec $\mathcal{C}$. D'autre part, on a $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ et la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc $\cos(\theta_1) > \cos(\theta_2)$. Comme les nombres $\cos(\theta_1)$ et $\cos(\theta_2)$ sont respectivement les abscisses des points $M(\theta_1)$ et $M(\theta_2)$, cela prouve, par définition que $M(\theta_1)$ est visible du point A et que $M(\theta_2)$ ne l'est pas.



- (c) La fonction f étant strictement décroissante sur $[0, \omega]$, l'égalité $f(\theta_1) = f(\theta_2)$ fait qu'il est impossible d'avoir $\theta_2 \leq \omega$ (sinon on aurait deux éléments de $[0, \omega]$ ayant la même image et f ne serait plus injective). On a donc $\theta_2 > \omega$.

De même, f étant strictement croissante sur $[\omega, \pi]$, l'égalité $f(\theta_1) = f(\theta_2)$ fait qu'il est impossible d'avoir $\theta_1 \geq \omega$ (sinon on aurait deux éléments de $[\omega, \pi]$ ayant la même image et f ne serait plus injective). On a donc $\theta_1 < \omega$.

Pour conclure, on a donc :

$$\boxed{\theta_1 < \omega < \theta_2}$$

8. (a) Si $\theta = \omega$, alors la droite $\mathcal{D}_m$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ (d'après le résultat de la question 2.d) : comme il n'y a qu'un seul point d'intersection entre la droite et le cercle, le point d'intersection est évidemment visible du point A dans ce cas.

On suppose maintenant que $\theta < \omega$.

À la lecture du tableau de variation, on a donc $m = f(\theta) > f(\omega)$.

Toujours à la lecture du tableau de variation, l'équation $f(\theta) = m$ possède exactement deux solutions dans $[0, \pi]$:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta \in [0, \omega[\\ \theta_2 \in]\omega, \pi] \end{cases}$$

Les deux seuls points d'intersection entre la droite $(AM(\theta))$ et le cercle $\mathcal{C}$ sont $M(\theta_1) = M(\theta)$ et $M(\theta_2)$. Comme $0 \leq \theta_1 < \omega < \theta_2 \leq \pi$, on en déduit d'après le résultat de la question 7.b que

le point $M(\theta) = M(\theta_1)$ est visible du point A .

- (b) On raisonne de manière analogue en posant $m = f(\theta) > f(\omega)$.

À la lecture du tableau de variation, l'équation $f(\theta) = m$ possède exactement deux solutions dans $[0, \pi]$:

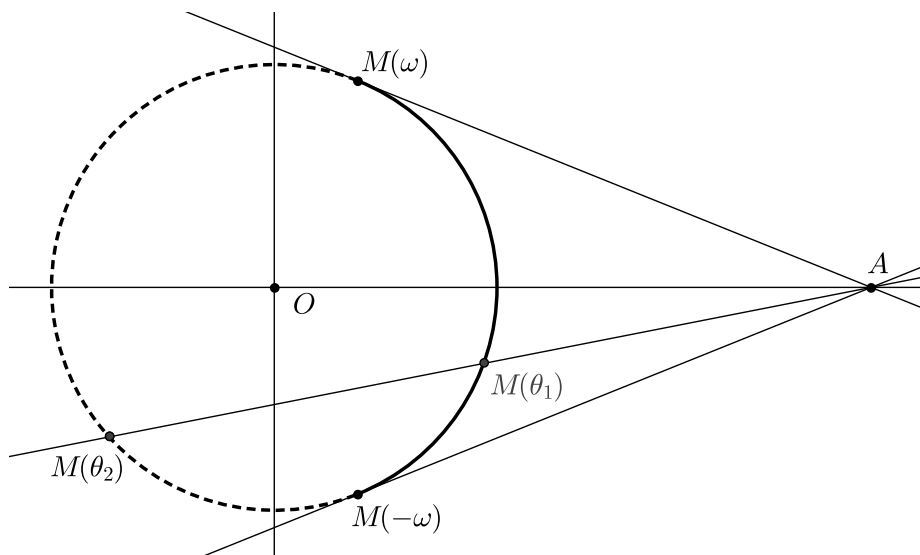
$$\begin{cases} \theta_1 \in [0, \omega[\\ \theta_2 = \theta \in]\omega, \pi] \end{cases}$$

Les deux seuls points d'intersection entre la droite $(AM(\theta))$ et le cercle $\mathcal{C}$ sont $M(\theta_1)$ et $M(\theta_2) = M(\theta)$. Comme $0 \leq \theta_1 < \omega < \theta_2 \leq \pi$, on en déduit d'après le résultat de la question 7.b que

le point $M(\theta) = M(\theta_2)$ n'est pas visible du point A .

9. Par symétrie on peut facilement voir que :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \in [-\omega, 0] \text{ alors } M(\theta) \text{ est visible depuis le point } A ; \\ \text{si } \theta \in [-\pi, -\omega[\text{ alors } M(\theta) \text{ n'est pas visible depuis le point } A . \end{cases}$$



Partie B : un contour apparent d'une quadrique

$$\begin{aligned}
 1. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_S(\lambda) &= \det(S - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} \\
 &= \left(1 - \lambda - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \lambda + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)
 \end{aligned}$$

et :

$$\boxed{\text{Sp}(S) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}}$$

2. (a) R est une matrice symétrique réelle.

D'après le théorème spectral, R est donc diagonalisable par le biais d'une matrice orthogonale, autrement dit, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice $\Omega \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale, telles que $D = \Omega^{-1} R \Omega$.

Or Ω est orthogonale, donc $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$. Finalement :

$$\boxed{D = {}^t\Omega R \Omega}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_R(\lambda) &= \det(R - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la 1ère colonne} \\
 &= (3 - \lambda) \cdot \left[(1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} \right] = (3 - \lambda) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) \quad \text{d'après la question 1.}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(R) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3 \right\}}$$

On peut donc prendre :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Déterminons alors $E_{\frac{1}{2}} = \ker(R - \frac{1}{2}I_3)$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}} &\Leftrightarrow (R - \frac{1}{2}I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On sait que $\frac{1}{2}$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité 1 donc $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.

De plus, $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}$ donc $E_{\frac{1}{2}} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Comme on cherche une matrice Ω orthogonale, il faut normer le vecteur propre précédent. Soit :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \text{vect}(\vec{e}_1)$$

Remarque. La question est ambiguë : il est difficile de savoir si les correcteurs attendent les détails pour la recherche d'un sous-espace propre, ou si le fait d'expliquer comment on fait avec la calculatrice suffit ...

On détermine de même les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\frac{3}{2}$ et 3.

Ceci peut se faire à l'aide de la calculatrice, en utilisant par exemple la TI nspire CAS :

- On saisit la matrice à l'aide de l'éditeur graphique, dans la variable R .
- On tape "eigVl(R)", puis "eigVc(R)". La calculatrice donne alors les valeurs propres, puis les vecteurs propres correspondants.
- En identifiant 0.707107 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on pose donc :

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et on a : } E_{\frac{3}{2}} = \text{vect}(\vec{e}_2)$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et on a : } E_3 = \text{vect}(\vec{e}_3)$$

Remarque. Il est par ailleurs très facile de voir que $R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

Conclusion. On a $D = {}^t\Omega R\Omega$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit la forme quadratique $q : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ où $\mathcal{E}_3$ est l'espace euclidien orienté de l'énoncé.

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \mapsto 3x^2 + y^2 - yz + z^2$$

Remarque. $(x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 - yz + z^2$ est un polynôme homogène de degré 2, donc q est bien une forme quadratique.

Soit M le point de $\mathcal{E}_3$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, Σ a pour équation $q(\vec{OM}) = 1$.

La matrice de q dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est R .

Plaçons nous dans le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

D'après les formules de changement de base pour la matrice d'une forme quadratique, la matrice de q dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est ${}^t\Omega R\Omega = D$, car Ω est la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Si on note (X, Y, Z) les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$, une équation de Σ est alors :

$$\begin{aligned} q(\vec{OM}) &= 1 \\ \Leftrightarrow {}^t \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 + 3Z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$,

Σ est un ellipsoïde.

4. (a) $M \in \mathcal{E} \iff M$ est à la fois dans le plan $\mathcal{P}$ et sur Σ

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } M \in \mathcal{E} \iff \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3} \end{cases}}$$

(b) Soit $O'(\frac{1}{3}, 0, 0)$ et $\mathcal{R}_2 = (O'; \vec{j}, \vec{k})$ un repère de $\mathcal{P}$.

Dans $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{E}$ a pour équation $y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3}$ de la forme $ay^2 + bz^2 + cyz + dy + ez = f$: $\mathcal{E}$ est donc une conique, éventuellement dégénérée.

Soit la forme quadratique $q_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y\vec{j} + z\vec{k} \mapsto y^2 - yz + z^2$ (polynôme homogène de degré 2)

La matrice de q_2 dans la base $(\vec{j}, \vec{k})$ est S .

On a vu que $\text{Sp}(S) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$.

Chaque valeur propre étant de multiplicité 1, les sous-espaces propres $E_{\frac{1}{2}}(S)$ et $E_{\frac{3}{2}}(S)$ sont de dimension 1.

Appelons $\vec{J}$ et $\vec{K}$ des vecteurs propres normés tels que $E_{\frac{1}{2}}(S) = \text{vect}(\vec{J})$ et $E_{\frac{3}{2}}(S) = \text{vect}(\vec{K})$,

la matrice de q_2 dans la base $(\vec{J}, \vec{K})$ est $D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

La matrice S étant symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux. Il en résulte que la famille $(\vec{J}, \vec{K})$ est orthonormale (donc libre). $\mathcal{P}$ étant un plan, $(O'; \vec{J}, \vec{K})$ est donc un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{E}$ a pour équation $y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3}$ dans $\mathcal{R}_2$, ce qui équivaut à $q_2(\vec{OM}) = \frac{2}{3}$ en notant (y, z) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}_2$.

Notons alors (Y, Z) les coordonnées de M dans $(O'; \vec{J}, \vec{K})$. Dans le repère $(O'; \vec{J}, \vec{K})$, $\mathcal{E}$ a pour équation : ${}^t \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \iff \frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 = \frac{2}{3}$

$$\iff \boxed{\frac{3}{4}Y^2 + \frac{9}{4}Z^2 = 1} \text{ en multipliant par } \frac{2}{3}$$

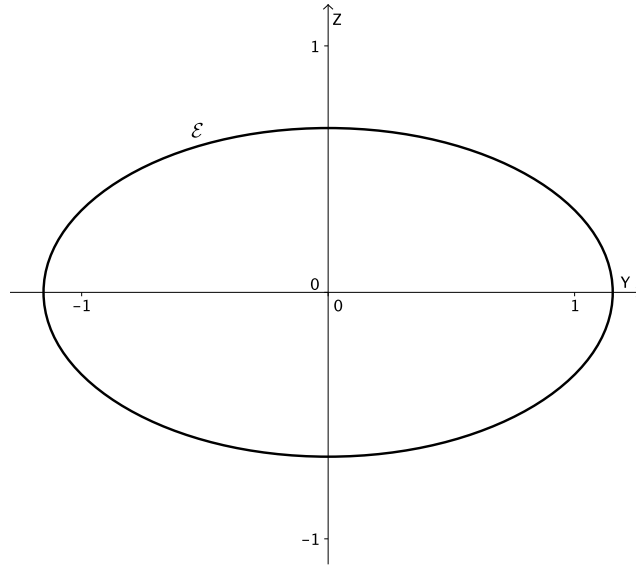
(c) $\mathcal{E}$ a une équation de la forme $\frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $b = \frac{2}{3}$. (On a bien $a > b$)

$\mathcal{E}$ est une ellipse de centre O' , de grand axe $[\alpha\alpha']$ où α et α' sont les sommets de coordonnées $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ et $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ dans le repère $(O'; \vec{J}, \vec{K})$.

Remarques.

◇ Pour la construction de $\mathcal{E}$, on connaît également le petit axe $[\beta\beta']$ où β et β' sont les points de coordonnées $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ et $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ dans le repère $(O'; \vec{J}, \vec{K})$.

◇ $\frac{2}{\sqrt{3}} \simeq 1,2$



Remarque. La surface d'équation $y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3}$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un cylindre elliptique de direction (Ox) . $\mathcal{E}$ est une section droite de ce cylindre.

5. (a) $3x_N^2 + y_N^2 - y_N z_N + z_N^2 = 3 \times 0^2 + 0 - 0 \times 1 + 1^2 = 1$, donc :

$$\boxed{N \in \Sigma}$$

(b) $\vec{NA}$ a pour coordonnées $(1, 0, -1)$.

Il en résulte que $(NA) = N + \text{vect}(\vec{NA})$ a pour équations paramétriques :

$$\boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$(c) \quad M(x, y, z) \in (NA) \cap \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} 3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \\ x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \\ 3\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \\ 4\lambda^2 - 2\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \\ \lambda(2\lambda - 1) = 0 \end{cases}$$

D'où $M(x, y, z) \in (NA) \cap \Sigma \Leftrightarrow M(0, 0, 1) = N$ ou $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Conclusion. (NA) coupe la surface Σ en N et au point $M'\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\frac{1}{2} > 0$, on a trouvé un point M' , point d'intersection de Σ avec (AN) qui vérifie $x_{M'} > x_N$, donc

N n'est pas visible du point A .

6.

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\text{grad}} \phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v, w) \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v, w) \\ \frac{\partial \phi}{\partial w}(u, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{ (a) } 3x_B^2 + y_B^2 - y_B z_B + z_B^2 &= 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{3+6}{9} = 1, \text{ donc :} \end{aligned}$$

$$B \in \Sigma$$

(b) Σ a pour équation $\phi(x, y, z) = 0$.

$$B \in \Sigma \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} \phi(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \text{ donc}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi(B) \text{ dirige la normale au plan tangent à } \Sigma \text{ en } B.$$

$$\text{Ainsi, } M(x, y, z) \in \Pi_B \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \phi(B) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3} \\ y - \frac{\sqrt{2}}{3} \\ z + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \left(x - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{2} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) - \sqrt{2} \left(z + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - \frac{2}{3} + \sqrt{2}y - \frac{2}{3} - \sqrt{2}z - \frac{2}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 2} \end{aligned}$$

(c) $2x_A + \sqrt{2}y_A - \sqrt{2}z_A = 2 + 0 - 0 = 2$, donc

$$\boxed{A \in \Pi_B}$$

Comme A appartient au plan tangent à la surface Σ en B , d'après l'énoncé,

$$\boxed{B \in \Gamma}$$

$$8. \quad \overrightarrow{\text{grad}} \phi(T) = \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \quad \text{si et seulement si } u = v = w = 0.$$

Or $(0, 0, 0) \notin \Sigma$, donc tous les points de Σ sont réguliers.

De la même manière qu'à la question 7.(b),

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \Pi_T &\Leftrightarrow \overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \phi(T) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \\ z - w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 6u(x - u) + (2v - w)(y - v) + (-v + 2w)(z - w) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6ux - 6u^2 + (2v - w)y - 2v^2 + vw + (-v + 2w)z + vw - 2w^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6ux + (2v - w)y + (-v + 2w)z - 6u^2 - 2v^2 + 2vw - 2w^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6ux + (2v - w)y + (-v + 2w)z - 2 \underbrace{(3u^2 + v^2 - vw + w^2)}_{=1 \text{ car } T \in \Sigma} = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{6ux + (2v - w)y + (2w - v)z = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad T(u, v, w) \in \Gamma &\Leftrightarrow \begin{cases} T \in \Sigma \\ A \in \Pi_T \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} T \in \Sigma \\ 6u \times 1 + 0 + 0 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 + v^2 - vw + w^2 = 1 \\ u = \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow T \in \mathcal{P} \cap \Sigma = \mathcal{E} \end{aligned}$$

Conclusion.

$$\boxed{\Gamma = \mathcal{E}}$$

Rédigé par :

Pierre Béjia, TSI 2, Lycée Antonin Artaud, Marseille
et
Frédérique Evrard, TSI 2, Lycée Rouvière, Toulon.