

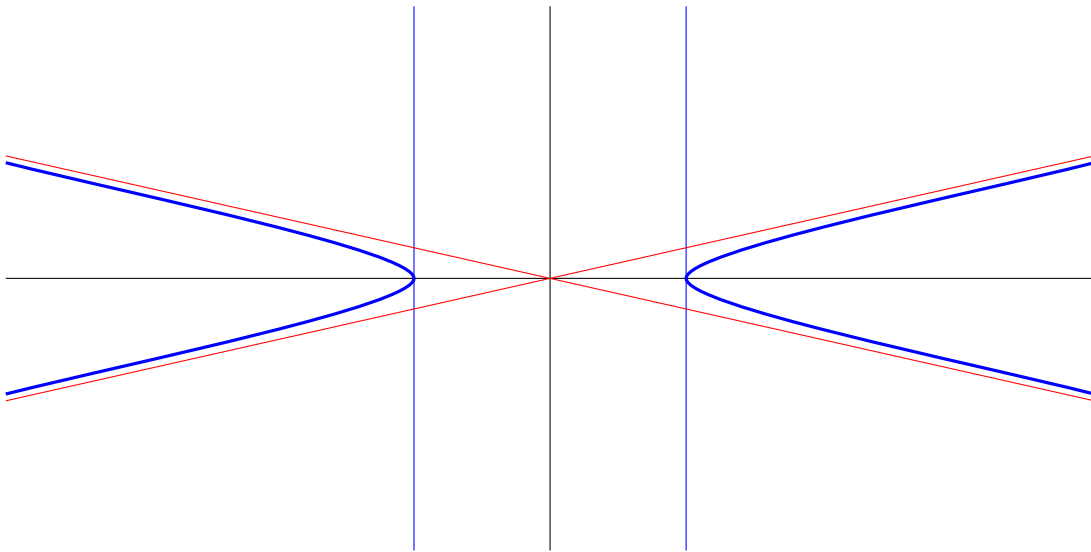
CCP 2013

Mathématiques B

Un corrigé proposé par : **AQALMOUN MOHAMED** agrégé de mathématiques CPGE
Khouribga

EXERCICE

1. L'équation réduite de l'hyperbole est $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{(1/\sqrt{13})^2} = 1$, les tangentes aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ ont pour équations : $x = 1$ et $x = -1$.
Les équations des asymptotes sont : $x = \sqrt{13}y$ et $x = -\sqrt{13}y$.



2. D'abord, si x et y sont positifs, alors x a pour expression $x = \sqrt{13y^2 + 1}$, donc les solutions positifs de l'équation $x^2 - 13y^2 = 1$, sont de la forme $(\sqrt{13y^2 + 1}, y)$, $y \in \mathbb{R}_+$, pour les solutions demandés, il faut ajouter les deux conditions suivantes : $y \leq 200$ et $x = E(x)$ la partie entière de x .

Il faut, alors chercher les valeurs de $y \leq 200$ pour lesquelles $\sqrt{13y^2 + 1}$ est un entier.

L'algorithme :

```

Pour y de 0 à 200 faire,
  x = sqrt(13y^2 + 1),
  Si x = E(x) "floor(x)" renvoyer (x, y)
fin si ;
fin faire,
fin.
```

3. Un exemple avec **WxMaxima** ;

```

Sol :=block([x,i],
  for i :0 thru 200 do (
    x :sqrt(13*i^2+1),
    if x=floor(x) then display([x,i])
  ))$
Sol;
[x,y]=[1,0]
[x,y]=[649,180]
done

```

PROBLÈME :

Matrices toutes puissances

Première partie :
Quelques exemples

- Le cas de taille 1 : on identifie les matrices de taille 1 et les éléments de $\mathbb{K}$.
 - Si $a \in \mathbb{R}$, avec $a \geq 0$, alors ,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b^n = a$ avec $b = \sqrt[n]{a}$.
Si $a \in T_1(\mathbb{R})$, en particulier pour $n = 2$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a = b^2 \geq 0$.
 - Les racines n -ièmes complexes de a , sont $\sqrt[n]{a} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
 - D'après la question précédente :pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout nombre complexe non nul b , il existe $z \in \mathbb{C}$, tel que $b = z^n$, et on a aussi $0 = 0^n$, donc $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = B^n$, par la multiplicativité du déterminant on a $\det A = \det B^n = (\det B)^n$, donc $\det A \in T_1(\mathbb{C})$.
 - Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1 \notin T_1(\mathbb{R})$, donc $A \notin T_2(\mathbb{R})$.

- Si une telle matrice B existe , alors $AB = B^3 = BB^2 = BA$, c'est-à-dire que les deux matrice A et B commutent, mais d'autre part $AB = BA$; entraîne que $b = c = 0$, ainsi la matrice B est diagonale , et l'égalité $A = B^2$ donne des équations impossibles dans $\mathbb{R}$; $a^2 = -1$ et $d^2 = -2$.
- Le polynôme caractéristique de A est $-(X-2)^2(X-1)$, et son polynôme minimal est $(X-2)(X-1)$ scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. De plus elle est semblable à la matrice $D = \text{diag}(2, 2, 1)$.
 - Elle existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $A = P \text{diag}(2, 2, 1) P^{-1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et B la matrice $P \text{diag}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}, 1) P^{-1}$, on a alors $B^n = A$, donc A est $T P \mathbb{R}$.
 - $n = 2$, prenons $B = P \text{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) P^{-1} = \dots$
 - $n = 3$, prenons $B = P \text{diag}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, 1) P^{-1} = \dots$
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Remarque : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta)$ est inversible et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $R(\theta)^n = R(n\theta)$.

- ${}^t A A = A {}^t A = I_2$ et $\det A = 1$, donc A est une matrice de rotation vectorielle, dont une mesure d'angle $\theta = \pi$ ($\cos \theta = -1$).

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R(\frac{\pi}{n})^n = R(\pi) = A$, donc A est $TP\mathbb{R}$.
6. (a) Le polynôme caractéristique de N est $(-1)^p X^p$, donc $N^p = 0$.
- (b) Supposons N est $TP\mathbb{R}$, et soit B une matrice telle que $B^p = A$, on a alors $B^{2p} = (B^p)^p = 0^p = 0$, donc la matrice B est nilpotente, par suite $B^p = 0$, d'où $A = B^p = 0$, la matrice A est nulle.

Deuxième partie :

Le cas où le polynôme caractéristique est scindé

7. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$, $i = 0, \dots, k$ sont premiers entre eux, et leur produit est un polynôme annulateur de A , donc par le théorème des noyaux, on a :
 $\mathbb{K}^d = \ker(A - \lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_k)^{r_k} = C_1 \oplus \dots \oplus C_k$.
8. (a) v commute avec u , alors v commute avec tout polynôme en u , en particulier v commute avec $P(u)$; si $x \in \ker(P(u))$ alors $P(u)(v(x)) = (P(u) \circ v)(x) = (v \circ P(u))(x) = v(P(u)(x)) = 0$, donc $v(x) \in \ker(P(u))$.
- (b) u commute avec $u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^d}$, donc $C_i = \ker(A - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^d})^{r_i}$ est stable par u .
9. Pour $x \in C_i$, on a ; $(u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i})^{r_i}(x) = (u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^d})^{r_i}(x) = 0$ donc $(u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i})^{r_i} = 0$, ainsi l'endomorphisme $u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i}$ est nilpotent.
10. Pour $i = 1, \dots, k$, notons par g_i l'endomorphisme $u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i}$, g_i est un endomorphisme nilpotent de C_i et $u_{C_i} = \lambda_i \text{Id}_{C_i} + g_i$, pour $1 \leq i \leq k$, on fixe une base $\mathcal{B}_i$ de C_i et notons N_i la matrice de g_i dans la base $\mathcal{B}_i$, considérons la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^d$ construite à partir des bases $\mathcal{B}_i$ qui est une base adaptée à la décomposition $C_1 \oplus \dots \oplus C_k$, la matrice de A dans cette base est une matrice par bloc, où chaque bloc est la matrice de $u_{C_i} = \lambda_i \text{Id}_{C_i} + g_i$ dans la base $\mathcal{B}_i$ qui est de la forme $\lambda_i I_{p_i} + N_i$, donc dans cette base $(\mathcal{B})$ la matrice de A est de la forme : $\text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$, elle existe alors une matrice $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $A = P \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}$.
11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $i = 1, \dots, k$; soit B_i une matrice telle $B_i^n = \lambda_i I_{p_i} + N_i$, notons aussi par B la matrice par bloc $B = P \text{diag}(B_1, \dots, B_k) P^{-1}$, par un produit par bloc, on obtient $B^n = A$, donc la matrice A est $TP\mathbb{K}$.

Troisième partie :

Le cas des matrices unipotentes

12. (a) Soit $V = X^p Q + R$ avec $\deg R < p$, la division euclidienne de V par X^p , au voisinage de 0 on a $V(x)x^p + R(x) = x^p o(x^p)$, mais $V(x)x^p = o(x^{p-1})$, et donc $R(x) + o(x^{p-1}) = o(x^{p-1})$ deux développements limités à l'ordre $p-1$, par unicité de la partie entière, on a $R(x) = 0$, ou encore $R = 0$, d'où $V = X^p + Q$.
- (b) Notons U la partie régulière du développement limité à l'ordre p , de $(1+x)^{\frac{1}{n}}$, de sorte que $(1+x)^{\frac{1}{n}} = U(x) + o(x^p)$, on a alors :
 $1+x = (U(x) + o(x^p))^n = U(x)^n + \sum_{k=1}^n C_n^k U(x)^{n-k} (o(x^p))^k$ et d'autre part, pour tout $1 \leq k \leq n$:
 $U(x)^{n-k} (o(x^p))^k = o(x^p) [U(x)^{n-k} (o(x^p))^{k-1}]$, et donc $U(x)^{n-k} (o(x^p))^k = o(x^p)$, il en résulte que $1+x = U(x)^n + o(x^p)$.
- (c) On a $1+x - U(x)^n = o(x^p)$, d'après la question 12.a, il existe un polynôme Q , tel que $1+x - U(x)^n = X^p Q$, c'est-à-dire $1+x = U(x)^n + X^p Q$.
13. (a) D'après la question précédente, ils existent deux polynômes U et Q dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $1+x = U^n + X^p Q$, on applique cette relation à N , on obtient $I_p + N = U(N)^n + N^p Q(N)$, et comme N est nilpotente, alors $N^p = 0$ et $I_p + N = U(N)^n$, donc $I_p + N$ est $TP\mathbb{K}$.

- (b) $\lambda I_p + N = \lambda(I_p + \lambda^{-1}N)$, et puisque la matrice $\lambda^{-1}N$ est nilpotente, alors $I_p + \lambda^{-1}N$ est $TP\mathbb{K}$; soit $n \in \mathbb{N}^*$, ils existent une matrice B et un scalaire α tels que $B^n = I_p + \lambda^{-1}N$ et $\alpha^n = \lambda$; alors $(\alpha B)^n = \lambda(I_p + \lambda^{-1}N) = \lambda I_p + N$.
14. (a) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique de A est scindé, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de A . On sait d'après la partie II, que A peut s'écrire sous la forme $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$. Or la matrice A est inversible, alors les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont tous non nulles, et d'après la question précédente les matrices $\lambda_k I_{p_k} + N_k$ sont $TP\mathbb{C}$, puis par les résultats de la partie II, la matrice A est $TP\mathbb{C}$.
- (b) Déjà pour $p \geq 2$, les matrices nilpotentes non nulles ne sont pas des matrices $TP\mathbb{C}$.
15. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice non inversible, et n'est pas diagonalisable.

Considérons aussi les deux matrices : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = \operatorname{diag}(B, C)$, et comme $B = I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente, alors les deux matrices B et C sont des matrices $TP\mathbb{R}$, ainsi la matrice A est $TP\mathbb{R}$.