Ce problème a pour objet l'étude d'un algorithme, voisin de celui de Salamin (1976), qui donne une suite convergeant très rapidement vers π.

Étant donné deux nombres réels positifs ou nuls a et b, on notera (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour $n \geqslant 0$, par :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Si $a = 1$ et $b = x$, avec $x \geqslant 0$, alors a_n et b_n sont des fonctions de x qu'on notera respectivement u_n et v_n.

I. LA MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE $\mathrm{M}(a, b)$

I.1. Convergence des suites (a_n) et (b_n).

I.1.1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$ et $a \neq b$, on a :

$$\begin{cases} 0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} < \dfrac{1}{2}(a_n - b_n). \end{cases}$$

Que deviennent ces inégalités si $a = b$?

I.1.2. Démontrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et qu'elles ont la même limite.

On notera $\mathrm{M}(a, b)$ cette limite commune et f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{M}(1, x)$.

I.2. Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique.

Démontrer que, quels que soient les réels $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ et quel que soit l'entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{M}(a_n, b_n) = \mathrm{M}(a, b) \\ \mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(b, a) \\ \mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathrm{M}(a, b). \end{cases}$$

En déduire que, pour $a > 0$, on a $\mathrm{M}(a, b) = a f\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

I.3. Continuité de la fonction f.

I.3.1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n et v_n sont continues.

I.3.2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant u_n(x) - f(x) \leqslant 2^{-n}|1 - x|.$$

I.3.3. En déduire que la fonction f est continue.

.4. Étude de la fonction f au voisinage de 1.

Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1+x}{2}$. En déduire que la fonction f est dérivable au point $x = 1$.

I.5. **Étude aux bornes de la fonction f.**

I.5.1. Calculer $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en ce point ? Le graphe de f a-t-il une tangente au point d'abscisse nulle ?

I.5.2. Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

I.5.3. Démontrer que le graphe de f présente une branche parabolique, dont on précisera la direction, quand x tend vers $+\infty$.

I.6. **Sens de variation de la fonction f.**

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes. En déduire que la fonction f est croissante.

I.7. **Représentation graphique de la fonction f.**

I.7.1. Calculer les valeurs décimales par défaut à 10^{-5} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

0,01 0,1 0,2 0,4 0,6 0,8 2 3 10 100.

I.7.2. Donner une représentation graphique sur l'intervalle $[0, 3]$ de la fonction f ainsi que des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1+x}{2}$ (on prendra 5 cm pour unité).

II. EXPRESSION DE M (a, b) PAR UNE INTÉGRALE ELLIPTIQUE

Étant donné deux réels strictement positifs a et b, on pose :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}, \quad \mathrm{J}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}.$$

II.1. **Convergence et propriétés des intégrales I (a, b) et J (a, b).**

II.1.1. Démontrer que les intégrales $\mathrm{I}(a, b)$ et $\mathrm{J}(a, b)$ sont convergentes et qu'on a $\mathrm{J}(a, b) = 2\mathrm{I}(a, b)$.

On notera g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{I}(1, x)$.

II.1.2. Démontrer, en utilisant le changement de variable $t = b \tan \theta$, que :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

En déduire que la fonction g est continûment dérivable.

II.1.3. Démontrer que, quels que soient $a > 0$, $b > 0$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{I}(a, b) = \mathrm{I}(b, a) \\ \mathrm{I}(\lambda a, \lambda b) = \lambda^{-1}\, \mathrm{I}(a, b). \end{cases}$$

En déduire que $\mathrm{I}(a, b) = \dfrac{1}{a}\, g\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

I.2. Expression de M (a, b) en fonction de I (a, b).

II.2.1. Démontrer, en utilisant le changement de variable $s = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right)$, qu'on a $J\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2\,I(a, b)$.

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $I(a_n, b_n) = I(a, b)$.

II.2.2. Démontrer que $I(a, b) = \dfrac{\pi}{2\,M(a, b)}$.

En déduire que la fonction f est continûment dérivable sur $]0, +\infty[$.

I.3. Comportement asymptotique des fonctions f et g.

II.3.1. Démontrer, en utilisant le changement de variable $s = \dfrac{x}{t}$, que :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+1)(s^2+x^2)}}.$$

En déduire que $g(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$.

II.3.2. Démontrer, en encadrant $t^2 + 1$ sur l'intervalle $[0, \sqrt{x}]$, que g est équivalente au voisinage de 0^+ à la fonction h définie pour $x > 0$ par :

$$h(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}}.$$

II.3.3. Calculer $h(x)$. En déduire que g est équivalente au voisinage de 0^+ à la fonction $x \mapsto -\ln x$.

II.3.4. En déduire des équivalents de f au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.

III. EXPRESSION DE π EN FONCTION DE f ET f'

On restreindra désormais les fonctions u_n et v_n à l'intervalle $]0, 1[$. On notera w_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $w_n = \sqrt{u_n^2 - v_n^2}$ et k_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $k_n = 2^{-n} \ln\left(\dfrac{u_n}{w_n}\right)$.

Justifier l'existence des fonctions w_n et k_n.

I.1. Convergence de la suite des fonctions k_n.

III.1.1. En remarquant que $M(a, b) = M\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ (cf. I.2.) et que $w_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2}$, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$2\,M(u_{n+1}, w_{n+1}) = M(u_n, w_n).$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$2^n\,M(u_n(x), w_n(x)) = f(\sqrt{1-x^2}).$$

III.1.2. Démontrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n f\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) = \frac{f(\sqrt{1-x^2})}{f(x)}.$

III.1.3. Démontrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{w_n(x)}{u_n(x)} = 0$.

En remplaçant f par un équivalent dans le résultat de la question précédente, en déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{f(x)}{f(\sqrt{1 - x^2})}.$$

III.2. **Convergence de la suite des fonctions dérivées k'_n.**

III.2.1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n, v_n, w_n et k_n sont continûment dérivables sur $]0, 1[$ et que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u'_n > 0$ et $v'_n > 0$.

III.2.2. Démontrer que la fonction $\dfrac{k'_n}{v_n^2}$ est indépendante de n (on pourra utiliser la relation $w_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2}$).

III.2.3. Déduire du résultat précédent que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in]0, 1[$, on a $k'_n(x) = \dfrac{v_n^2(x)}{x(1 - x^2)}$.

III.2.4. Démontrer que la suite de fonctions (k'_n) converge, uniformément sur tout compact de $]0, 1[$, vers la fonction :

$$x \mapsto \frac{f^2(x)}{x(1 - x^2)}.$$

III.3. **Une expression de π.**

III.3.1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f^2(x)}{x(1 - x^2)}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{2} \dfrac{f(x)}{f(\sqrt{1 - x^2})}$.

III.3.2. Calculer directement cette dérivée et en déduire, en faisant $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, que :

$$\pi = 2\sqrt{2}\, \frac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

IV. APPROXIMATION DE π

Pour tout $n \geqslant 1$, on notera y_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $y_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et z_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $z_n = \dfrac{v'_n}{u'_n}$.

IV.1. **Convergence des suites des fonctions u'_n et v'_n.**

On note K un compact de $]0, 1[$.

IV.1.1. Démontrer que $y_n \geqslant 1$ et que la suite de fonctions (y_n) converge uniformément vers 1 sur K.

IV.1.2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{cases} y_{n+1} = \dfrac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}} \\[2ex] z_{n+1} = \dfrac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n)\sqrt{y_n}}. \end{cases}$$

IV.1.3. Démontrer que $z_n \geqslant 1$. En déduire que $u'_n \leqslant v'_n$ et que la suite de fonctions (u'_n) est croissante.

IV.1.4. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $y_{n+1} \leqslant z_{n+1} \leqslant \sqrt{y_n} \leqslant y_n$.
En déduire que la suite de fonctions (z_n) converge uniformément vers 1 sur K.

IV.1.5. Démontrer que $v'_{n+1}(x) \leqslant v'_n(x)$ si $(\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leqslant \dfrac{z_n(x) - 1}{z_n(x)}$ et que cette dernière inégalité est satisfaite à partir d'un rang n_0 indépendant de x dans K. En déduire que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u'_n \leqslant u'_{n+1} \leqslant v'_{n+1} \leqslant v'_n$ sur K et que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent uniformément sur K.

IV.2. Construction d'une suite (π_n) convergeant vers π.

IV.2.1. Démontrer que $\pi = 2\sqrt{2} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{v_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) u_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{u'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

IV.2.2. En déduire que π est limite de la suite (π_n) définie par $\pi_0 = 2 + \sqrt{2}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, par :

$$\pi_n = \pi_{n-1} \frac{1 + y_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 + z_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

IV.3. Rapidité de convergence de la suite (π_n).

IV.3.1. Démontrer que $0 \leqslant y_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{8}(y_n - 1)^2$. En déduire que :

$$0 \leqslant y_{n+1} - 1 \leqslant \frac{(y_1 - 1)^{2^n}}{8^{2^n - 1}}$$

et qu'on a donc :

$$0 \leqslant y_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \leqslant 8\,(500)^{-2^n}.$$

IV.3.2. Démontrer que :

$$0 \leqslant \pi_p - \pi_{p+1} \leqslant \frac{\pi_p}{2}\left(z_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \leqslant \frac{\pi_0}{2}\left(y_p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

En déduire que :

$$0 \leqslant \pi_{n+1} - \pi = \sum_{i=1}^{+\infty} (\pi_{n+i} - \pi_{n+i+1}) \leqslant \frac{\pi_0}{2}\left(y_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1\right) \leqslant 4\pi_0\,(500)^{-2^n}.$$

IV.3.3. Évaluer n pour que l'erreur commise en remplaçant π par π_{n+1} soit inférieure à $10^{-1\,000\,000}$.