

CENTRALE TSI 2012 – MATH 1 – CORRIGÉ

I -

I.A- .

I.A.1) $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \in [1, +\infty[$, $\left| \frac{e^{-xt}}{t} \right| \leq e^{-xt}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (cours : $x > 0$) d'où la convergence de l'intégrale.

De plus, par croissance de l'intégrale, $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$

I.A.2) Notons f la fonction définie par $f(x, t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$.

$f(x, t) = \frac{1}{t} (1 - t - (1 - xt) + o(t)) = x - 1 + o(1)$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = x - 1$

I.A.3) D'après ce qui précède, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ est faussement impropre et $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ comme somme de deux fonctions intégrables.

I.B- .

I.B.1) On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale :

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-xt}$;
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ [d'après **I.A.3**] et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;
- HD locale : soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. $\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$

On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$

On en déduit que $F(x) = \ln x + C$. On détermine C à l'aide de $F(1) = C = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$.

Conclusion : $F(x) = \ln x$.

I.C- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = F(b) - F(a) = \ln b - \ln a$

I.D- .

I.D.1) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;

$\frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-xt}}{t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ [d'après **I.A.1**] ;

$\frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{n-1}$ donc est intégrable sur $]0, 1]$ ($n \geq 1$).

I.D.2) Scindons la somme dans le second membre et utilisons la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1 - e^{-kt}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-kt} = (1 - 1)^n - (1 - e^{-t})^n$$

I.D.3) D'après ce qui précède, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n dt = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (F(x+k) - F(x))$

$$= - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k) + \ln x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k)$$

II -

II.A- .

II.A.1) La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est échelonnée en degrés ($\deg P_k = k$) donc libre et son cardinal, $n + 1$, égale la dimension de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, c'en est donc une base.

$$\text{II.A.2)} \quad P_k(X+1) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j+1) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k (X+j)$$

$$\text{donc } \Delta(P_k)(X) = \frac{1}{k!} \left[\prod_{j=1}^{k-1} (X+j+1) \right] \cdot ((X+k)-X) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{k=1}^{k-1} (X+j) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X+j+1) =$$

$$P_{k-1}(X+1)$$

D'autre part, $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$.

II.A.3) Pour $0 \leq m \leq k-1$, $\Delta^m(P_k) = \Delta^{m-1}(P_{k-1}(X+1)) = \dots = P_{k-m}(X+m)$;

pour $m = k$, $\Delta^k(P_k) = P_0(X+k) = 1$;

pour $m \geq k+1$, $\Delta^m(P_k) = \Delta^{m-k}(P_0) = 0$

On déduit de ce qui précède que pour $0 \leq k \leq n-1$, $\Delta^n(P_k) = 0$, et comme $(P_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\Delta^n(P) = 0$.

II.B-

II.B.1) Suivons l'indication de l'énoncé :

• La propriété est vérifiée pour $n = 0$ (et 1) ;

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)$

$$\Delta^{n+1}(P) = \Delta^n(P(X+1)) - \Delta^n(P(X)) \stackrel{HR}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n-(k-1)} P(X+k) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-(k+1)} P(X+k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] (-1)^{n-(k+1)} P(X+k) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-(k+1)} P(X+k)$$

qui est la propriété analogue au rang $n+1$.

II.B.2) D'après **II.B.1)**, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (X+r)^k = (-1)^n \Delta^n(X^r) = 0$ d'après **II.A.4)**.

III -

III.A- Notons f_r la fonction définie par $f_r(x, t) = \frac{e^{-xt}}{t^r} (1 - e^{-t})^n$

III.A.1) Comme au **I.D.1)**

III.A.2) Comme au **I.D.1)** : $f_r(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{n-r}$ donc est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $n > r-1 \iff n \geq r$.

III.B-

III.B.1) Encore le théorème de dérivation sous le signe intégrale :

• Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f_r(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[c, +\infty[$ et $\frac{\partial f_r}{\partial x}(x, t) = -f_{r-1}(x, t)$;

• Pour tout $x \in [c, +\infty[$, $t \mapsto f_r(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après **III.A.** et $t \mapsto \frac{\partial f_r}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;

• HD : $\forall x \in [c, +\infty[$, $\forall t \in]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f_r}{\partial x}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial f_r}{\partial x}(c, t) \right| = f_{r-1}(c, t)$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $n \geq r \geq r-1$

On en déduit que F_r est de classe \mathcal{C}^1 sur $[c, +\infty[$ et que $F_r'(x) = - \int_0^{+\infty} f_{r-1}(x, t) dt = -F_{r-1}(x)$

III.B.2) On en déduit que F_r est de classe \mathcal{C}^1 sur $\bigcup_{c>0} [c, +\infty[=]0, +\infty[$ et que la relation ci-dessus perdure.

III.C-

III.C.1) Inégalité des accroissements finis ou étude de variations.

III.C.2) $t \mapsto f_r(x, t)$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ donc $F_r(x) > 0$.

Pour l'autre inégalité, utiliser **III.C.1)** et effectuer le changement de variable $u = xt$.

III.C.3) Se déduit de la question précédente à l'aide du théorème des gendarmes ($n+1-r > 0$).

III.D- $\frac{d}{dx}((x+k)^r \ln(x+k)) = r(x+k)^{r-1} \ln(x+k) + (x+k)^{r-1}$. Donc :

$$G'_{r+1}(x) = -G_r(x) - \underbrace{\frac{(-1)^r}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{r-1}}_{=0 \text{ d'après l'égalité II.1}}$$

III.E- • Pour $r = 1$: d'après **I.D.3**, $F_1(x) = G_1(x)$;

- Soit $1 \leq r \leq n - 1$. On suppose que $F_r - G_r = 0$. Alors $(F_{r+1} - G_{r+1})' = -(F_r - G_r) = 0$ donc $F_{r+1} - G_{r+1}$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{r+1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G_{r+1}(x) = 0$, cette constante est nulle et $F_{r+1} = G_{r+1}$.

III.F- .

III.F.1) On scinde les logarithmes : $\ln(x+k) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)$, on scinde la somme, on factorise $\ln x$ dans la première et on utilise l'égalité II.1.

III.F.2) $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1}}{j} u^j + o(u^r)$.

La relation demandée s'obtient immédiatement après avoir remarqué que $(x+k)^r \cdot o\left(\left(\frac{k}{x}\right)^r\right) = o(1)$

$$(x+k)^r \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1} k^j}{j x^j} = \frac{1}{x^r} (x+k)^r \underbrace{\sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1} k^j}{j} x^{r-j}}_{\text{polynôme de degré } 2r-1}$$

Ainsi, $x^r \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \sum_{j=1}^r \dots$ est polynomial de degré $\leq 2r - 1$, d'où l'existence des constantes A_s .

Mais, pour la question suivante, il y a lieu d'expliciter un peu les coefficients. Reprenons donc les calculs en développant les $(x+k)^r$ et en attachant bien sa ceinture :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1} k^j}{j x^j} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} x^i k^{r-i} \right) \left(\sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1} k^j}{j x^j} \right)$$

On intervertit alors les \sum (finies) en faisant passer la première en dernier :

$$\dots = \sum_{i=0}^r \sum_{j=1}^r \binom{r}{i} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^{i-j} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{r-(i-j)}$$

Pour $0 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq r$, on retrouve bien que $-r \leq i-j \leq r-1$ et donc l'existence des constantes A_s .

III.F.3) Dans les jolis calculs précédents, pour $0 \leq i-j \leq r-1$, on a $1 \leq r-(i-j) \leq r \leq n-1$ et donc la substitution $X := 0$ dans la formule II.1 assure que les coefficients $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{r-(i-j)}$ sont tous nuls.

(Ouf!!)

III.F.4) Les exposants qui restent dans la somme sont tous < 0 donc $G_{r+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

IV -

IV.A- .

IV.A.1) Pour $|a| \leq n-1$, le facteur $(X-a) = (X+|a|)$ figure dans la décomposition de P_n donc $P_n(a) = 0$.

Pour $p = |a| \geq n$, $P_n(a) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (-p+j) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (p-j) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{p!}{(p-n)!} = (-1)^n \binom{p}{n}$.

IV.A.2) La somme est finie et vaut $\sum_{n=0}^p \binom{p}{n} (-x)^n = (1-x)^p$

IV.B- .

IV.B.1) $\left| \frac{P_{n+1}(a) \cdot x^{n+1}}{P_n(a) \cdot x^n} \right| = \left| \frac{a+n}{n+1} x \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} |x|$. Donc, avec la règle de D'ALEMBERT : si $|x| < 1$, la série converge absolument et si $|x| > 1$, la série diverge grossièrement. On en déduit que $R = 1$.

IV.B.2) Avec le théorème de dérivation des séries entières, on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, S'_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P_n(a) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) P_{n+1}(a) x^n$$

Et donc $(1-x)S'_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)P_{n+1}(a) - nP_n(a))x^n$

Or $(n+1)P_{n+1} = (X+n)P_n$ donc $(n+1)P_{n+1}(a) - nP_n(a) = aP_n(a)$
de quoi l'on déduit que $(1-x)S'_a(x) = aS_a(x)$.

IV.B.3) On résout l'équation différentielle $(1-x)y' - ay = 0$ sur $] -1, 1[$, intervalle où les fonction coefficients sont continues et où $(1-x)$ ne s'annule pas : le théorème de structure fournit que les solutions sont les fonctions $y = C \cdot \exp\left(\int \frac{a}{1-x} dx\right) = \frac{C}{(1-x)^a}$.

Pour $x = 0$, $S_a(0) = P_0(a) = 1$ donc, avec le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, $C = 1$ et $S_a(x) = \frac{1}{(1-x)^a}$.

IV.C-

IV.C.1) $w_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{(n+1)^c P_{n+1}(a)}{n^c P_n(a)} = c \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{a+n}{n+1} = (c-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{c-1+a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit, par comparaison à l'exemple de RIEMANN, que $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge $\iff c = 1 - a$

IV.C.2) On télescope : $\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln u_n - \ln u_1$ et cette suite converge d'après ce qui précède vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Par suite, (u_n) converge vers $L = u_1 e^\ell > 0$.

Il s'ensuit que $n^c |P_n(a)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} L (\neq 0)$ et donc que $|P_n(a)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L}{n^{1-a}}$.

IV.C.3) Par comparaison à l'exemple de RIEMANN, $\sum_{n \geq 0} |P_n(a)|$ converge $\iff 1 - a > 1 \iff a < 0$.

Alors, avec le théorème de continuité (radiale) des séries entières, $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S_a(x) = (1-1)^{-a} = 0$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n P_n(a) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S_a(x) = (1 - (-1))^{-a} = 2^{-a}$.