

## CCP - Maths 2

Proposition de corrigé

Taoufik said

## Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

**Q1.**  $((X_0 = 1), (X_0 = 2))$  est un système complet d'événements, par " probabilités totales " :

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1/X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 1/X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{3}{8}$$

Et  $P(X_1 = 2) = 1 - P(X_1 = 1) = \frac{5}{8}$ .

Autrement dit

$$X_1 - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{5}{8}\right)$$

**Q2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1/X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1/X_n = 2)P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cdot {}^t\mu_n$$

$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 2/X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 2/X_n = 2)P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cdot {}^t\mu_n$$

d'où  ${}^t\mu_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot {}^t\mu_n$  puis  $\mu_{n+1} = \mu_n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ .

**Q3.** Par la question **Q3.**, on a :  $\mu_5 = \mu_0 A^5$ . On trouve que :

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0,333984375 & 0,666015625 \\ 0,3330078125 & 0,6669921875 \end{pmatrix}$$

On demande d'arrondir au centièmes donc  $\mu_5 = (0,33; 0,67)$ .

**Q4.** • On a :  $P(T = 1) = P(X_1 = 1, X_0 = 2) = P(X_1 = 1/X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{1}{8}$ .

•• On a :  $P(T = k) = P(X_k = 1, \bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 2))$ .

La formule de probabilités composées permet d'écrire :

$$P(T = k) = P(X_k = 1 / \bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 2)) P(X_{k-1} = 2 / \bigcap_{i=0}^{k-2} (X_i = 2)) \dots P(X_1 = 2 / X_0 = 2) P(X_0 = 2)$$

Puisque l'état de la particule dépend uniquement de son état au temps qui précède, alors :

$$P(T = k) = P(X_k = 1/X_{k-1} = 2)P(X_{k-1} = 2/X_{k-2} = 2) \dots P(X_1 = 2/X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{3^{k-1}}{2^{2k+1}}$$

**Q5.** • Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X - 1)\left(X - \frac{1}{4}\right)$$

il est simplé à racines simples donc  $A$  est diagonalisable .

•• Les sous espaces propres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow x = y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{4}}(A) \Leftrightarrow x = -2y$$

donc  $E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $E_{\frac{1}{4}}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

On pose :  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  , son inverse est  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

**Q6.** Les composantes des applications  $M \mapsto QMQ^{-1}$  et  $M \mapsto \mu_0 M$  sont des fonctions polynomiales à plusieurs variables ( qui sont les coefficients de  $M$  ) donc ces applications sont continues.

**Q7.** Posons  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$  . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = QD^nQ^{-1}, \mu_n = \mu_0 A^n$$

Comme  $\|D^n - E_{1,1}\|_\infty = \frac{1}{4^n} \rightarrow 0$  avec  $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  alors  $\lim D^n = E_{1,1}$

le passage à la limite dans les égalités précédentes et la continuité des applications  $M \mapsto QMQ^{-1}$  et  $M \mapsto \mu_0 M$  sur  $M_2(\mathbb{R})$  permettent d'écrire :

$$\lim A^n = QE_{1,1}Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ puis } \lim \mu_n = \mu_0 \lim A^n = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

## Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

**Q8.**  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est une matrice stochastique donc pour  $i = 1, \dots, p$  ,  $\sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1$

si  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  alors  $u$  non nul et  $Au = u$  d'où  $1 \in \text{sp}(A)$ .

**Q9.** Soient  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  et  $k \in \{1, \dots, p\}$  tels que  $\|x\|_\infty = |x_k|$ . On a :

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{p,j}x_j \end{pmatrix}$$

donc  $\forall i = 1, \dots, p$  ,  $|\sum_{j=1}^p a_{i,j}x_j| \leq \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| |x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1}^p a_{i,j} = |x_k| = \|x\|_\infty$

d'où  $\|Ax\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq p} |\sum_{j=1}^p a_{i,j}x_j| \leq \|x\|_\infty$ .

**Q10.** Soient  $\lambda \in sp(A)$  et  $x \in \mathbb{C}^p$  tels que  $x \neq 0$  et  $Ax = \lambda x$ .

Par **Q9.** , on a  $|\lambda| \|x\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$

en simplifiant par  $\|x\|_\infty \neq 0$  , on obtient :  $|\lambda| \leq 1$ .

**Q11.** Si  $u \in \mathbb{C}^p$  tel que  $u \neq 0$  et  $Au = \lambda u$  alors Le vecteur  $x = \frac{1}{\|u\|_\infty} u$  convient.

**Q12.** On a :  $|x_i| = \|x\|_\infty = 1$ .

La  $i^{\text{ème}}$  ligne du système linéaire  $Ax = \lambda x$  s'écrit :

$$\sum_{j=1}^p a_{i,j}x_j = \lambda x_i$$

donc  $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$  , par suite :

$$|\lambda - a_{i,i}| = |(\lambda - a_{i,i})x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} = 1 - a_{i,i} \text{ car } a_{i,1}, \dots, a_{i,p} \geq 0 \text{ et leur somme vaut } 1$$

**Q13.** Soit  $\lambda \in sp(A)$ . La matrice  $A$  est bien stochastique donc il existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  vérifiant :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$$

d'où  $sp(A) \subseteq \overline{D}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap \overline{D}(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) \cup \overline{D}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  où  $\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} , |z - a| \leq r\}$ .

**Q14.** Si on refait la démonstration de **Q12.** , en supposant qu'il existe  $x \in \mathbb{C}^p$  non nul et qu'il existe  $i \in \{1, \dots, p\}$  tels que :

$$B'x = \lambda x \text{ et } |x_i| = 1$$

comme  $B' = (a_{k,j} - \delta_{k,j})_{1 \leq k, j \leq p-1}$  , alors :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| = |\lambda - (a_{i,i} - \delta_{i,i})| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p-1} |a_{i,j} - \delta_{i,j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p-1} a_{i,j} = 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$$

Bien sûr , cette démonstration n'est pas demandée.

Supposons que  $B'$  n'est pas inversible donc  $0 \in sp(B')$

Pour  $\lambda = 0$  , il existe  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  vérifiant :  $1 - a_{i,i} = |\lambda - (1 - a_{i,i})| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$   
donc  $a_{i,p} \leq 0$  ce qui est absurde.

**Q15.** On extrait de  $A - I_p$  une matrice de taille  $p-1$  qui est inversible donc  $rg(A) \geq p-1$   
puis  $dim Ker(A - I_p) \leq 1$ .

D'autre part ,  $1 \in sp(A)$  donc  $dim Ker(A - I_p) \geq 1$  , d'où le résultat cherché.

## Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

**Q16.** Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ,  $s(x, y) = (y, x)$ .

En particulier  $s(1, 0) = (0, 1)$  et  $s(0, 1) = (1, 0)$  . Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q17.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $B^{2n} = I_2$  et  $B^{2n+1} = B$ . Les deux suites extraites admettant deux limites différentes donc la suite  $(B^n)_n$  diverge dans  $M_2(\mathbb{R})$ .

La **proposition 2** tombe en défaut si la matrice stochastique n'est pas strictement positive.

**Q18.** Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $N$  et  $x$  un vecteur propre associé à  $\alpha$ .

Il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $N^k = 0$  donc  $\alpha^k \cdot x = N^k \cdot x = 0$  , d'où  $\alpha = 0$ .

La seule valeur propre possible est 0 donc le polynôme caractéristique s'écrit  $\chi_N(X) = X^p$ .  
Ce polynôme annule la matrice par théorème de Cayley-Hamilton , d'où  $N^p = 0$ .

**Q19 •** On a

$$\frac{\binom{n}{k}}{\frac{n^k}{k!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1 \quad (\text{fraction de deux polynômes unitaires de même degré})$$

D'où l'équivalence cherchée.

•• On a :  $\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} \lambda^{n-k} \rightarrow 0$  ( par comparaison de croissances ).

**Q20.** Une matrice scalaire permute avec toute matrice , donc la formule de Binôme s'applique

$$(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k \quad \text{car } N^p = 0$$

les scalaires de cette somme finie sont tous des termes de limite nulle , d'où le résultat.

**Q21.** Il existe  $Q \in GL_p(\mathbb{C})$  telle que :

$$Q^{-1} A Q = \text{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} + N_r)$$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}$  ,  $Q^{-1} A^n Q = \text{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \dots, (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n)$ .

Puisque les matrices  $N_1, \dots, N_r$  sont nilpotentes alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_i I_{p_i} + N_i)^n = O_{M_{p_i}(\mathbb{C})}$  pour chaque

$i = 1, \dots, r$ . d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^{-1}A^nQ = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = Q \text{diag}(1, 0, \dots, 0)Q^{-1}$  par continuité de l'application  $M \mapsto QMQ^{-1}$ .

## Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

**Q22.** Notons cet ensemble par  $F$  et considérons les applications continues ( polynomiales ) :

$$f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 + \dots + x_p \quad \text{et} \quad p_i : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_i, \quad i = 1, \dots, p$$

On sait que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé, que l'intersection de fermés l'est aussi et que  $\{1\}$  et  $\mathbb{R}^+$  sont des fermés de  $\mathbb{R}$  donc  $F = \bigcap_{i=1}^p p_i^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap f^{-1}(\{1\})$  est un fermé de  $\mathbb{R}^p$ .

**Q23.** On a  $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu_0 A^n$  la suite  $(A^n)$  converge ( **proposition 2** : stochastique et  $A > 0$  ) et l'application  $M \mapsto \mu_0 M$  est continue donc  $(\mu_n)$  converge vers  $\mu_\infty = \mu_0 \lim A^n$ .  
Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$  et  $\mu \mapsto \mu A$  est continue ( composantes polynomiales ) alors par passage à la limite, on trouve  $\mu_\infty = \mu_\infty A$ .

**Q24.** On a :  $\mu A = (m_1, \dots, m_p)(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p} = \left( \sum_{i=1}^p m_i a_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^p m_i a_{i,p} \right)$ .

Les composantes de  $\mu A$  sont positives car  $A$  et  $\mu$  sont positifs, leur somme est :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p m_i a_{i,j} = \sum_{i=1}^p m_i \sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{i=1}^p m_i = 1$$

On vient de montrer que :  $\mu \in F \Rightarrow \mu A \in F$ .

**Q25.** • On a :  $\mu_0 \in F$  ( par hypothèse ) et si  $\mu_n \in F$  alors  $\mu_{n+1} = \mu_n A \in F$  ( par **Q24.** ) donc  $\mu_n \in F$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , sa limite  $\mu_\infty$  appartient à l'adhérence de  $F$  qui est exactement  $F$  ( par **Q22.** ).  
on en déduit que  $\mu_\infty$  est une probabilité invariante ( car c'est un vecteur stochastique qui vérifie  $\mu = \mu A$  ).

**Q26.**  $\mu$  est un vecteur non nul ( car les composantes sont  $\geq 0$ , de somme 1 ). On a :

$$\begin{aligned} \mu \text{ est une probabilité invariante pour } A &\Leftrightarrow \mu A = \mu \\ &\Leftrightarrow {}^t \mu = {}^t A \cdot {}^t \mu \\ &\Leftrightarrow 1 \in \text{sp}({}^t A) \text{ associée à } {}^t \mu \end{aligned}$$

**Q27.** On a :  $\dim \text{Ker}({}^t A - I_p) = \dim \text{Ker}[{}^t(A - I_p)] = p - \text{rg}[{}^t(A - I_p)] = p - \text{rg}(A - I_p)$  comme  $p = \text{rg}(A - I_p) + \dim \text{Ker}(A - I_p) = \text{rg}(A - I_p) + 1$  ( Formule du rang et **Q15.** )  
alors  $\dim \text{Ker}({}^t A - I_p) = 1$ .

**Q28.** Supposons que  $\mu_1, \mu_2$  sont des probabilités invariantes par  $A$ .  
On a :  ${}^t \mu_1, {}^t \mu_2 \in \text{Ker}({}^t A - I_p)$  qui est une droite vectorielle

il existe  $\alpha > 0$  vérifiant :  ${}^t\mu_1 = \alpha \cdot {}^t\mu_2$  ( $\alpha > 0$  car  ${}^t\mu_1, {}^t\mu_2$  sont positifs et non nuls )  
le fait qu'ils sont stochastiques entraîne que  $\alpha = 1$  , d'où l'égalité.

## Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

**Q29.**  $\text{len}(A) = 4$  ,  $A[1] = [4, 5, 6]$  ,  $A[2][1] = 8$ .

**Q30.**

```
def difference(x,y)
n=len(x)
D=[ ]
for i in range(n)
D.append(x[i]-y[i])
return D
```

**Q31.**

```
def norme(x)
n=len(x)
N=abs(x[0])
for i in range(1,n)
if N<abs(x[i])
N=abs(x[i])
return N
```

**Q32.**

```
def itere(x,A)
n=len(x)
IT=[ ]
for i in range(n)
c=sum(x[k]A[k][i] for k in range(n))
IT=IT.append(c)
return IT
```

**Q33.**

```
def probaInvariante(A,eps)
n=len(A)
u=[1/n for i in range(n)]
v=itere(u,A)
w=difference(u,v)
while abs(w)>eps
u=liste(v)
v=itere(u,A)
w=difference(u,v)
return v
```

Pour vos remarques , merci de me contacter sur  
"taoufiki-maths@hotmail.fr"