L. Pharamond
Lycée Chaptal

Proposition de corrigé
Concours Centrale Supélec 2013
Mathématiques 1
TSI

I Cas $n = 1$ et méthode d'Euler

I.A) *La méthode d'Euler*

I.A.1) L'idée consiste à construire une application continue affine par morceaux, qui soit proche de l'unique solution y du système formé de l'équation différentielle $y' = f(y)$ munie de la condition initiale $y(0) = 1$. Le premier morceau affine correspond à l'application tangente de y à l'origine sur le segment $[0, \frac{1}{N}]$. Le second morceau affine est défini sur l'intervalle $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$; il correspond à l'application tangente de la solution de l'équation $y' = f(y)$ qui coïncide avec le premier morceau affine au point d'abscisse $\frac{1}{N}$. Et on réitère le procédé sur chaque intervalle $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$, jusqu'à l'intervalle $[\frac{N-1}{N}, 1]$.

I.A.2)

```
>MethEuler:=proc(N)
>local Y, k;
>Y:=array(0..N):
>Y[0]:=1
>for k from 0 to N-1 do
>Y[k+1]:=Y[k]+1/N*f(Y[k]):
>od:
> Y;
>end proc:
```

I.B) *Préliminaire au I.C*

I.B.1) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy constitué d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et d'une condition initiale admet une unique solution.

On vérifie aisément que la fonction $t \mapsto e^t$ convient.

$$\boxed{t \mapsto e^t \text{ est l'unique solution de } \mathcal{C}}$$

I.B.2) Pour tout $t > 1$, on a $0 < t - 1 < E(t) \leq t$, on en déduit $0 < \frac{t-1}{t} < \frac{E(t)}{t} \leq \frac{t}{t}$. Par passage à la limite, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t-1}{t} \leq \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{E(t)}{t} \leq \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{t}$. D'après le théorème de l'encadrement, on en déduit

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{E(t)}{t} = 1}$$

I.C) *Mise en œuvre de la méthode d'Euler pour $\mathcal{E}_1$*

I.C.1) La définition proposée correspond exactement à la démarche du I.A appliquée à la fonction $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$

I.C.2) Le calcul des premiers valeurs de $\tilde{y}_k$ nous permet de conjecturer $\tilde{y}_k = \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^k$, $\forall k \in \{0, \ldots, N\}$. Démontrons-le par récurrence sur k.

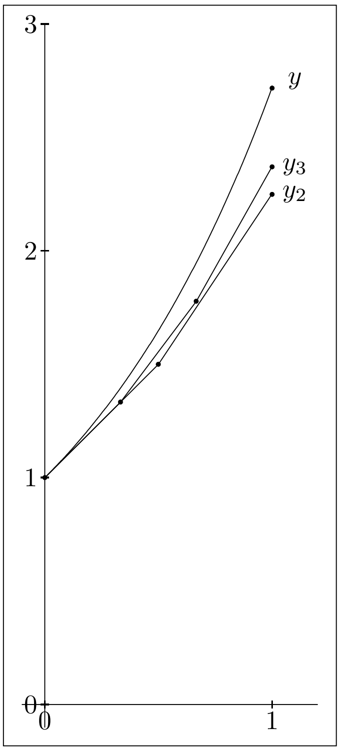
Initialisation : La propriété est clairement vérifiée pour $k = 0$.

Hypothèse de récurrence : Supposons $\tilde{y}_k = \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^k$ avec $k \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Hérédité : On a $\tilde{y}_{k+1} = \left(1+\dfrac{1}{N}\right)\tilde{y}_k = \left(1+\dfrac{1}{N}\right)\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^k = \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^{k+1}$

$$\boxed{\tilde{y}_k = \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^k, \qquad \forall k \in \{0, \ldots, N\}}$$

I.C.3)a)



La fonction y_2 est affine par morceaux, continue et vérifie

$$\begin{cases} y_2(0) = \tilde{y}_0 = 1 \\ y_2(\frac{1}{2}) = \tilde{y}_1 = \frac{3}{2} \\ y_2(1) = \tilde{y}_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

La fonction y_3 est affine par morceaux, continue et vérifie

$$\begin{cases} y_3(0) = \tilde{y}_0 = 1 \\ y_3(\frac{1}{3}) = \tilde{y}_1 = \frac{4}{3} \\ y_3(\frac{2}{3}) = \tilde{y}_2 = \frac{16}{9} \\ y_3(1) = \tilde{y}_3 = \frac{64}{27} \end{cases}$$

I.C.3)b) Posons $z_N(t) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^k \left(t+1-\frac{k}{N}\right)$ pour $t \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$.

L'application $y_N(t)$ est une fonction polynomiale de degré 1 sur l'intervalle $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ et dont le graphe est donc une droite, qui passe par les points de coordonnées $(\frac{k}{N}, \tilde{y}_k)$ et $(\frac{k+1}{N}, \tilde{y}_{k+1})$.

Deux droites passant par deux mêmes points distincts étant confondues, pour vérifier que $z_N(t) = y_N(t)$ pour tout $t \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$, il suffit de vérifier qu'elle est aussi polynomiale de degré 1 et que son graphe passe aussi par les points $(\frac{k}{N}, \tilde{y}_k)$ et $(\frac{k+1}{N}, \tilde{y}_{k+1})$. Or on a

$$\begin{aligned} z_N(\tfrac{k}{N}) &= \left(1+\tfrac{1}{N}\right)^k = \tilde{y}_k \\ z_N(\tfrac{k+1}{N}) &= \left(1+\tfrac{1}{N}\right)^{k+1} = \tilde{y}_{k+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, t \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}] \qquad y_N(t) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^k \left(t+1-\frac{k}{N}\right)}$$

I.C.3)c) Soit $t \in [0,1]$. Découpons l'intervalle $[0,1]$ en N parts égales. Supposons $t \neq 1$. Il existe $k \in \{0,\dots,N-1\}$ tel que $t \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$. On a alors $Nt \in [k, k+1[$ et $E(Nt) = k$. On a bien l'égalité demandée. Pour $t = 1$, l'expression donnée est aussi vérifiée. De ce fait,

$$\boxed{\forall\, t \in [0,1], \qquad y_N(t) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{E(Nt)} \left(t+1-\frac{E(Nt)}{N}\right)}$$

I.C.4) Pour $t > 1$, on a

$$0 < Nt - 1 < E(Nt) \leq Nt$$

dont on déduit les deux inégalités suivantes

$$1 < \left(1+\frac{1}{N}\right)^{Nt-1} < \left(1+\frac{1}{N}\right)^{E(Nt)} \leq \left(1+\frac{1}{N}\right)^{Nt}$$

$$0 < t+1-\frac{Nt}{N} \leq t+1-\frac{E(Nt)}{N} < t+1-\frac{Nt-1}{N}$$

En multipliant ces inégalités membres à membres (ce qui se justifie car toutes les expressions sont positives), on en déduit les inégalités successives suivantes

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^{Nt-1} \leq y_N(t) \leq \left(1+\frac{1}{N}\right)^{Nt+1}$$

$$e^{(Nt-1)\ln(1+\frac{1}{N})} \leq y_N(t) \leq e^{(Nt+1)\ln(1+\frac{1}{N})}$$

Comme $\ln(1+\frac{1}{N}) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{N}$, on en déduit $\lim\limits_{N\to+\infty} e^{(Nt-1)\ln(1+\frac{1}{N})} = \lim\limits_{N\to+\infty} e^{(Nt+1)\ln(1+\frac{1}{N})} = e^t$. D'après le théorème de l'encadrement, on peut conclure

$$\boxed{\forall\, t \in [0,1], \qquad \lim_{N\to+\infty} y_N(t) = e^t = y(t)}$$

I.D) *Étude d'un cas particulier avec second membre*

I.D.1) Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ avec λ constante réelle. En cherchant une solution particulière sous la forme $t \mapsto Ae^{-t}\cos(t) + Be^{-t}\sin(t)$, on constate que $t \mapsto \sin(t)$ convient (on peut aussi utiliser la méthode de la variation de la constante). On en déduit que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^t + e^{-t}\sin(t)$. Parmi ces solutions, la seule qui satisfait la condition initiale du problème de Cauchy posé est celle avec $\lambda = 0$.

$$\boxed{h : t \mapsto e^{-t}\sin(t) \text{ est l'unique solution du système } \begin{cases} h'(t) - h(t) = e^{-t}(\cos(t) - 2\sin(t)) \\ h(0) = 0 \end{cases}}$$

I.D.2) Les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto e^t$ étant développables en série entière avec un rayon de convergence égal à $+\infty$ chacune, on en déduit que h est développable en série entière avec un rayon de convergence infini.

Pour tout t réel, on a

$$h(t) = e^{-t}\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{-t}e^{it}) = \mathrm{Im}(e^{t(-1+i}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1+i)^n\ \frac{t^n}{n!}\right).$$

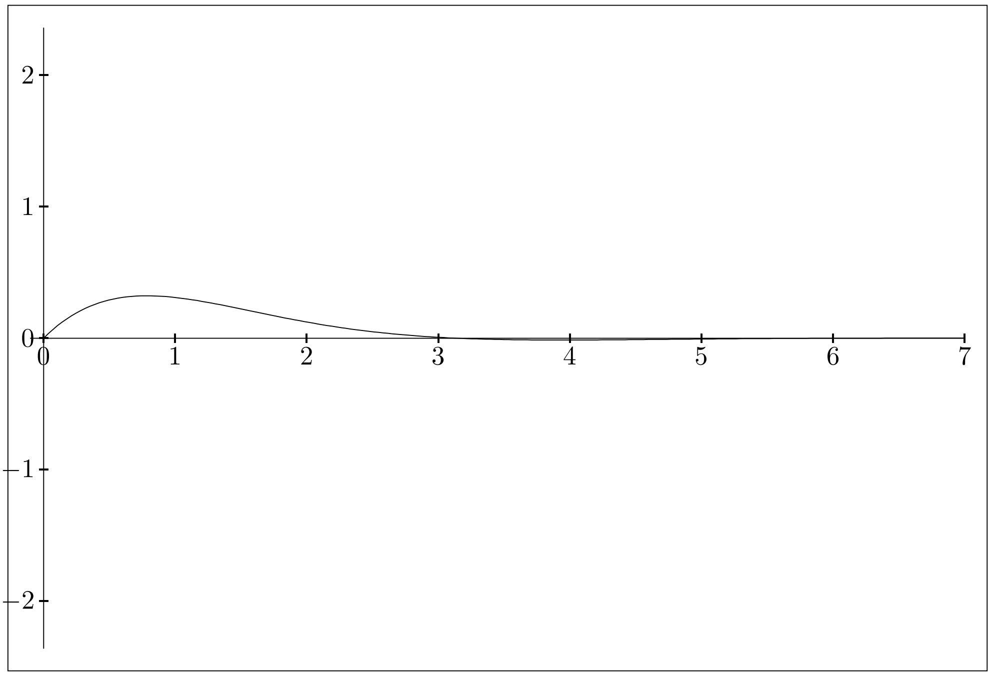
Comme $-1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$,

$$h(t)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}})^n\ \frac{t^n}{n!}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n(\cos(\tfrac{3n\pi}{4})+i\sin(\tfrac{3n\pi}{4})\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\sin(\tfrac{3n\pi}{4})\frac{t^n}{n!}$$

$$\boxed{\text{Le développement en série entière de h(t) est } h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\sin(\frac{3n\pi}{4})\frac{t^n}{n!}}$$

I.D.3) Graphe de la fonction h sur l'intervalle $[0, 2\pi]$



I.D.4) La fonction $t \mapsto h(t)$ est majorée en valeur absolue par la fonction e^{-t} qui est d'intégrale convergente sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

$$\boxed{I \text{ est convergente}}$$

$$I = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\sin(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\mathrm{Im}(e^{it})dt = \mathrm{Im}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t+it}dt$$

$$= \mathrm{Im}\left(\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-t+it}}{-1+i}\right]_0^x\right) = \mathrm{Im}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}\right) - \frac{1}{-1+i}\right) = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{-1+i}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}}$$

II Généralités

II.A) *Quelques propriétés qualitatives des solutions de $\mathcal{E}_n$*

II.A.1) Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ associée à l'équation différentielle homogène étant 1 et -1,

$$\boxed{\text{Les solutions réelles de } \mathcal{E}_n \text{ sont : } t \mapsto ae^t + be^{-t}, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2}$$

$$\boxed{\text{Les solutions complexes de } \mathcal{E}_n \text{ sont : } t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}, \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2}$$

II.A.2) Montrons par récurrence que y est de classe C^{kn} pour tout k entier positif.

Initialisation : La fonction y étant solution de $\mathcal{E}_n$, elle est au moins dérivable n fois et comme $n \geq 1$, on en déduit y est C^0 sur $\mathbb{R}$. La propriété est donc vérifiée pour $k = 0$.

Hypothèse de récurrence : Supposons y de classe C^{nk}.

Hérédité : Comme y est de classe C^{nk}, et que $y^{(n)} = y$, on en déduit que $y^{(n)}$ est de classe C^{nk} et que y est de classe $C^{n(k+1)}$. Ce qui termine la démonstration.

La fonction y étant de classe C^{nk} pour tout k entier positif, on en déduit qu'elle est de classe C^∞

$$\boxed{y \text{ est de classe } C^\infty}$$

II.A.3) Comme y est de classe C^∞, il en est de même de $y^{(n)}$. Nous pouvons donc dériver la relation $y^{(n)} = y$, ce qui donne $y'^{(n)} = y'$.

$$\boxed{y' \text{ est solution de } \mathcal{E}_n}$$

II.A.4) Montrons d'abord que y appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ entraîne que sa partie réelle appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$: Soit $y \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors la fonction $\tilde{y} = y + i \times 0$ est clairement un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$

Montrons maintenant la réciproque : Soit $\tilde{y} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$. On peut la décomposer en partie réelle et partie imaginaire : $\tilde{y} = y + iz$ avec y et z des fonctions réelles. Comme $\tilde{y} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, on en déduit :

$$y^{(n)} + iz^{(n)} = y + iz$$

soit encore

$$y^{(n)} = y \qquad \text{et} \qquad z^{(n)} = z$$

$$\boxed{\text{Les propositions sont bien équivalentes}}$$

II.B) *Structure de l'ensemble des solutions*

II.B.1) Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$:

— La fonction nulle est un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ n'est pas vide.

— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(y,z) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$. La linéarité de la dérivation implique $\lambda y + z \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire à coefficients réels.

$$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel}}$$

II.B.2) Posons

$$\boxed{A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \text{ avec } \begin{cases} a_{i,i+1} = 1 & \forall\ i \in \{1,\dots,n-1\} \\ a_{n,1} = 1 & \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

On reconnaît en A une matrice dite circulante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

L'égalité $Y' = AY$ donne $\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$; ce qui est équivalent au système $\begin{cases} y'(t) = y'(t) \\ y''(t) = y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) = y(t) \end{cases}$ et ce dernier est clairement vérifié par tout élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Il suffit de choisir } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}}$$

II.B.3) L'application θ est linéaire par linéarité de la dérivation.

Montrons que θ est une application surjective. Soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Construisons à partir de a, la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $a_k = a_{(k \text{ mod. } n)}$ pour tout k entier. Considérons la série entière définie par $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$. Comme la suite des $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, le rayon de convergence de cette suite est égale à $+\infty$. Notons $y(t)$ sa somme pour tout t réel. la fonction $t \mapsto y(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par construction, et son image par θ est a. L'application θ est donc surjective.

Montrons que θ est une application injective. Soit $y(t)$ et $S(t)$ deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant même image par θ. Les suites $(y^{(k)}(0))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(S^{(k)}(0))_{k\in\mathbb{N}}$ sont identiques et sont bornées. Les fonctions $y(t)$ et $S(t)$ sont donc développables en séries entières à l'origine, avec un rayon de convergence infinie. De plus, elles ont le même développement en série entière. Elles sont donc égales. L'application θ est donc injective.

$$\boxed{\theta \text{ est un isomorphisme}}$$

Comme $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, on en déduit

$$\boxed{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n}$$

III Les cas $n = 3$ et $n = 4$

III.A) *Le cas $n = 3$: méthode de la variation de la constante*

III. A.1) Les fonctions dérivées de $t \mapsto e^t$ étant toutes égales à $t \mapsto e^t$, on a

$$\boxed{t \mapsto e^t \text{ est une solution de } \mathcal{E}_3 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

III. A.2) En posant $y(t) = z(t)e^t$, on a $y^{(3)}(t) = z^{(3)}(t)e^t + 3z^{(2)}(t)e^t + 3z'(t)e^t + z(t)e^t$. Puisque $e^t \neq 0$ l'équation $\mathcal{E}_3$ se traduit par

$$\boxed{(\mathcal{E}') \qquad z^{(3)}(t) + 3z^{(2)}(t) + 3z'(t) = 0}$$

III. A.3) En posant $Z = z'$, l'équation $(\mathcal{E}')$ s'interprète comme une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2, dont l'équation caractéristique $r^2 + 3r + 3$ admet deux racines conjuguées complexes $r_1 = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit une expression de Z :

$$Z = \lambda e^{(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \mu^{(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})t} \qquad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

Ce qui se traduit par

$$z(t) = \frac{\lambda}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} e^{(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \frac{\mu}{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}^{(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \gamma \qquad \text{avec} \quad (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{C}^3$$

Quitte à poser $\alpha = \dfrac{\lambda}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\beta = \dfrac{\mu}{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{Les solutions complexes de } (\mathcal{E}') \text{ sont } z(t) = \alpha e^{(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \beta e^{(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \gamma \text{ avec} (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3}$$

Les solutions réelles de $(\mathcal{E}')$ sont les parties réelles des solutions complexes,

$$\boxed{\text{Les solutions réelles de } (\mathcal{E}') \text{ sont } z(t) = ae^{-\frac{3}{2}t}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + be^{-\frac{3}{2}t}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + c \text{ avec} (a, b, c) \in \mathbb{R}^3}$$

III. A.4) On en déduit, en posant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$\boxed{\mathcal{S}_3(\mathbb{C}) = \{t \mapsto \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3\}}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = \{t \mapsto ae^{-\frac{1}{2}t}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + be^{-\frac{1}{2}t}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + ce^t \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}}$$

Supposons qu'il existe un élément y de $\mathcal{S}_3(\mathbb{C})$ qui soit 2π-périodique. Il existe alors $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tels que, pour tout t réel on ait :

$$\alpha e^{j(t+2\pi)} + \beta e^{j^2(t+2\pi)} + \gamma e^{(t+2\pi)} = \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t$$

Ce que l'on peut réécrire

$$\alpha(e^{2\pi j}-1)e^{jt}+\beta(e^{2\pi j^2}-1)e^{j^2t}+\gamma(e^{2\pi}-1)e^{t}=0$$

Or la famille $(t\mapsto e^{jt}, t\mapsto e^{j^2t}, t\mapsto e^{t})$ est libre : en effet si on suppose qu'il en existe une combinaison linéaire nulle, en dérivant deux fois cette relation et en évaluant en $t=0$ chacune des relations, on obtient un système linéaire dont le déterminant est un déterminant de Vandermonde. Comme, par ailleurs, $e^{2\pi j}$, $e^{2\pi j^2}$ et $e^{2\pi}$ ne sont pas égaux à 1. On en déduit que la seule solution 2π-périodique de $\mathcal{S}_3(\mathbb{C})$ est la fonction nulle. Or $\mathcal{S}_3(\mathbb{C})$ contient $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Il n'y a pas dans } \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \text{ de fonction } 2\pi\text{-périodique non nulle}}$$

III.B) ***Le cas $n=4$: recherche de séries entières solutions***

III. B.1) Soit $t\in\mathbb{R}$. Posons $\alpha_k=\frac{t^{4k}}{(4k)!}$, $\beta_k=\frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!}$, $\gamma_k=\frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!}$, $\delta_k=\frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!}$.

D'après la règle de d'Alembert comme :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{|t|^4}{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)}=0,$$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{|t|^4}{(4k+5)(4k+4)(4k+3)(4k+2)}=0,$$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|\gamma_{k+1}|}{|\gamma_k|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{|t|^4}{(4k+6)(4k+5)(4k+4)(4k+3)}=0,$$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|\delta_{k+1}|}{|\delta_k|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{|t|^4}{(4k+7)(4k+6)(4k+5)(4k+4)}=0,$$

les séries $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont convergentes quelque soit la valeur de $t\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les séries } A(t),\ B(t),\ C(t) \text{ et } D(t) \text{ sont définies sur } \mathbb{R}}$$

La somme de la série entière $t\mapsto B(t)$ est de classe C^∞ sur son domaine de définition et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. On en déduit

$$B'(t)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!}\right)'=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!}\right)'=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{4k}}{(4k)!}=A(t)$$

Un calcul analogue nous donne

$$\boxed{B'(t)=A(t)\qquad C'(t)=B(t)\qquad D'(t)=C(t)}$$

III. B.2)a) Supposons k impair, il existe alors l entier tel que $k=2l+1$. Calculons σ_k

$$\sigma_k=\sigma_{2l+1}=1+(-1)^{2l+1}+i^{2l+1}+(-i)^{2l+1}=1-1+(-1)^l i+(-1)^l(-i)=(-1)^l(i-i)=0$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est impair, alors } \sigma_k=0}$$

III. B.2)b) Soit k un entier. Calculons σ_k en fonction de la classe de k modulo 4 :

- Si $k\equiv 0 \pmod{4}$, alors il existe $l\in\mathbb{N}$ tel que $k=4l$, et on a
  $\sigma_k=1+(-1)^{4l}+i^{4l}+(-i)^{4l}=4$

- Si $k \equiv 2 \pmod{4}$, alors il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $k = 4l + 2$, et on a
  $\sigma_k = 1 + (-1)^{4l+2} + i^{4l+2} + (-i)^{4l+2} = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$
- Si $k \equiv 1 \pmod{4}$ ou que $k \equiv 3 \pmod{4}$, alors k est impair et d'après la question précédente on a
  $\sigma_k = 0$

$$\boxed{\sigma_k \neq 0 \Longleftrightarrow k \equiv 0 \pmod{4}}$$

III. B.2)c) On a a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(t) + \cos(t)) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(t) + \cos(t)) = \frac{1}{4}\left(e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}\right)}$$

De plus, comme $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{4}\left(e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-it)^k}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (1 + (-1)^k + i^k + (-i)^k)\frac{t^k}{k!}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k \frac{t^k}{k!}\right)$$

Comme $\sigma_k = 0$ pour k non multiple de 4 et que $\sigma_{4k} = 4$, cette somme se simplifie

$$\frac{1}{4}\left(e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_{4k} \frac{t^{4k}}{(4k)!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k}}{(4k)!} = A(t)$$

$$\boxed{A(t) = \frac{1}{4}\left(e^t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(t) + \cos(t)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}}$$

III. B.2)d) En intégrant trois fois de suite l'expression obtenue à la question précédente, sachant que $B(0) = C(0) = D(0) = 0$, on en déduit

$$\boxed{B(t) = \frac{1}{4}\left(e^t - e^{-t} - ie^{it} + ie^{-it}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(t) + \sin(t)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{C(t) = \frac{1}{4}\left(e^t + e^{-t} - e^{it} - e^{-it}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(t) - \cos(t)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{D(t) = \frac{1}{4}\left(e^t - e^{-t} + ie^{it} - ie^{-it}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(t) - \sin(t)) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}}$$

III. B.3) En posant $y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, on a

$$y^{(4)}(t) = \sum_{k=4}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)a_k t^{k-4} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4}t^k.$$

L'égalité $y(t) = y^{(4)}(t)$ se traduit successivement par

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4}t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} = a_k \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}}$$

En particulier,

- on a $a_4 = \dfrac{1}{4!}a_0$, $a_8 = \dfrac{4!}{8!}a_4 = \dfrac{1}{8!}a_0$, $a_{12} = \dfrac{8!}{12!}a_8 = \dfrac{1}{12!}a_0$, et par une récurrence rapide, on en déduit que $a_{4k} = \dfrac{1}{(4k)!}a_0$ pour tout k entier positif.
- on a $a_5 = \dfrac{1}{5!}a_1$, $a_9 = \dfrac{5!}{9!}a_5 = \dfrac{1}{9!}a_1$, $a_{13} = \dfrac{9!}{13!}a_9 = \dfrac{1}{13!}a_1$, et par une récurrence rapide, on en déduit que $a_{4k+1} = \dfrac{1}{(4k+1)!}a_1$ pour tout k entier positif.
- on a $a_6 = \dfrac{2!}{6!}a_2$, $a_{10} = \dfrac{6!}{10!}a_6 = \dfrac{2!}{10!}a_2$, $a_{14} = \dfrac{10!}{14!}a_{10} = \dfrac{2!}{14!}a_2$, et par une récurrence rapide, on en déduit que $a_{4k+2} = \dfrac{2!}{(4k+2)!}a_2$ pour tout k entier positif.
- on a $a_7 = \dfrac{3!}{7!}a_3$, $a_{11} = \dfrac{7!}{11!}a_7 = \dfrac{3!}{11!}a_3$, $a_{15} = \dfrac{11!}{15!}a_{11} = \dfrac{3!}{15!}a_3$, et par une récurrence rapide, on en déduit que $a_{4k+3} = \dfrac{3!}{(4k+3)!}a_3$ pour tout k entier positif.

On en déduit

$$\boxed{y(t) = a_0A(t) + a_1B(t) + 2a_2C(t) + 6a_3D(t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}}$$

En utilisant les égalités à la question III.B.2.c), on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0A(t) + a_1B(t) + 2a_2C(t) + 6a_3D(t) \\ &= \frac{a_0}{2}(\mathrm{ch}(t) + \cos(t)) + \frac{a_1}{2}(\mathrm{sh}(t) + \sin(t)) + \frac{2a_2}{2}(\mathrm{ch}(t) - \cos(t)) + \frac{6a_3}{2}(\mathrm{sh}(t) - \sin(t)) \\ &= (\frac{a_0}{2} + a_2)\mathrm{ch}(t) + (\frac{a_1}{2} + 3a_3)\mathrm{sh}(t) + (\frac{a_0}{2} - a_2)\cos(t) + (\frac{a_1}{2} - 3a_3)\sin(t) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{y(t) = z_1\mathrm{ch}(t) + z_2\mathrm{sh}(t) + z_3\cos(t) + z_4\sin(t) \quad \text{avec} \begin{cases} z_1 = \frac{a_0}{2} + a_2,\ z_2 = \frac{a_1}{2} + 3a_3, \\ z_3 = \frac{a_0}{2} - a_2,\ z_4 = \frac{a_1}{2} - 3a_3 \end{cases}}$$

III. B.4) La question précédente montre que $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin)$ sont des éléments de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$. Comme θ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^4$, cette famille est une base de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille des images par θ est une base de $\mathbb{R}^4$. Or les images de la famille $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin)$ par θ est la famille $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)$. Pour savoir si cette famille est une base, il suffit de vérifier que son déterminant dans la base canonique est non nul.

Or $\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. La famille $(1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)$ est une base de $\mathbb{R}^4$

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin) \text{ est une base de } \mathcal{S}_4(\mathbb{R})}$$

Par ailleurs, toute base de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ est une base de $\mathcal{S}_4(\mathbb{C})$

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin) \text{ est une base de } \mathcal{S}_4(\mathbb{C})}$$

III. B.5) Les séries entière $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ étant de rayon de convergence infini, il en est de même de $a_0A(t)+a_1B(t)+2a_2C(t)+6a_3D(t)$ quelque soient les valeurs complexes de a_0, a_1, a_2 et a_3. En particulier,

$$\boxed{\text{Toute solution de } \mathcal{E}_4 \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R}}$$

Le développement en série entière de la solution recherchée vérifie :
$a_0 = \frac{y(0)}{0!} = 1$, $a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = 1$, $a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$ et $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = -\frac{1}{6}$. On en déduit

$$\boxed{y(t) = a_0A(t) + a_1B(t) + 2a_2C(t) + 6a_3D(t) = A(t) + B(t) + C(t) - D(t)}$$

IV Retour au cas général

IV.A) *Expression des solutions dans le cas général*

IV. A.1) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y^{(n)}(t) = (\omega^k)^n e^{w^k t} = (\omega^n)^k e^{w^k t} = e^{w^k t} = y(t)$. La fonction $t \mapsto e^{w^k t}$ est solution de $\mathcal{E}_n$. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a

$$\boxed{t \mapsto e^{w^k t} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}),\ \forall k \in \mathbb{Z}}$$

IV. A.2) et IV. A.3) La famille des y_k est une famille libre si et seulement son image par θ est une famille libre de $\mathbb{C}^n$. Or, pour tout $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $\theta(t \mapsto e^{w^k t}) = (1, w^k, w^{2k} \ldots, w^{(n-1)k})$.

Considérons le déterminant de la famille $((1, w^k, w^{2k} \ldots, w^{(n-1)k}))_{1 \le k \le n-1}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On reconnaît un déterminant de Vandermonde appliqué aux complexes $(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$. C n complexes étant distincts, le déterminant de Vandermonde associé est non nul. Cela signifie que $((1, w^k, w^{2k} \ldots, w^{(n-1)k}))_{1 \le k \le n-1}$ est une base de $\mathbb{C}^n$, et qu'il en est de même de la famille des $(y_k)_{1 \le k \le n-1}$ pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

$$\boxed{\text{La famille des } (y_k)_{1 \le k \le n-1} \text{ est une base de } \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \text{, en particulier, elle est libre.}}$$

La famille des $(y_k)_{1 \le k \le n-1}$ étant une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$,

$$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \text{ s'écrit comme une combinaison linéaire des } (y_k)_{1 \le k \le n-1}.}$$

IV. A.4) La fonction exponentielle $z \mapsto e^z$ est développable en série entière avec un rayon de convergence infini. De ce fait, les fonctions $(y_k)_{1 \le k \le n-1}$ sont toutes développables en série entière sur $\mathbb{R}$ avec un rayon de convergence infini. Et il en est de même de toute combinaison linéaire des $(y_k)_{1 \le k \le n-1}$ solution de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$,

$$\boxed{\text{Toutes les solutions de } (\mathcal{E}_n) \text{ sont développables en série entière sur } \mathbb{R}}$$

IV.B) ***Étude des soltuions 2π-périodiques de $\mathcal{E}_n$***

IV. B.1) Soit k un entier naturel non nul. À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

- $a_k(y') = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(kt)y'(t)dt = \dfrac{1}{\pi}\left([\cos(kt)y(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} k\sin(kt)y(t)dt\right) = kb_k(y)$
- $b_k(y') = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(kt)y'(t)dt = \dfrac{1}{\pi}\left([\sin(kt)y(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} k\cos(kt)y(t)dt\right) = -ka_k(y)$

Par ailleurs, pour $k = 0$, comme on a convenu $b_0(y') = 0$ on a clairement $b_0(y') = -0 \times a_0(y)$. Il reste à montrer la nullité de $a_0(y')$. Or, comme y est 2π-périodique, on a

- $a_0(y') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y'(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}[y(t)]_0^{2\pi} = 0 = 0 \times b_0(y)$

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_k(y') = kb_k(y) \\ b_k(y') = -ka_k(y) \end{cases}}$$

IV. B.2) En utilisant les relations établies à la question précédente, on a

- Pour k strictement positif,
  $c_k(y') = \dfrac{1}{2}(a_k(y') - ib_k(y')) = \dfrac{1}{2}(kb_k(y) + ika_k(y)) = \dfrac{ik}{2}(-ib_k(y) + a_k(y)) = ikc_k(y)$
- Pour k nul,
  $c_0(y') = a_0(y') = 0 = 0 \times ic_0(y)$
- Pour k strictement négatif,
  $c_k(y') = \dfrac{1}{2}(a_{-k}(y') + ib_{-k}(y')) = \dfrac{1}{2}((-k)b_{-k}(y) + i(-k)a_{-k}(y)) = ikc_k(y)$

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(y') = ikc_k(y)}$$

Supposons n impair. En utilisant la relation précédente, on a

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(y^{(n)}) = (ik)^n c_k(y)$$

Comme $y = y^{(n)}$, cela implique

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(y)[(ik)^n - 1] = 0$$

Comme n est impair, $(ik)^n$ est un imaginaire pur non nul ; il ne peut pas être égal à 1, et on en déduit

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ impair} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(y) = 0}$$

IV. B.3) **Théorème de Dirichlet—.** *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 par morceaux et T-périodique. Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\tilde{f}$ de f.*

Comme f est de classe C^∞, elle est égale à sa régularisée et le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que la série de Fourier de y converge vers y. Pour n impair, les coefficients c_k de la série de Fourrier étant tous nuls, la série de Fourier est la fonction nulle et y aussi. On a ainsi montré que

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, la seule fonction } 2\pi\text{-périodique solution de } \mathcal{E}_n \text{ est la fonction nulle}}$$

Supposons maintenant n pair. Supposons $n \equiv 2 (\mathrm{mod.}\ 4)$, alors on peut appliquer le même raisonnement que pour le cas n impair, car $(ik)^n = (-1)^{\frac{n}{2}} k^n = -k^n$ qui est un réel négatif ne peut pas égal à 1.

$\boxed{\text{Si } n \equiv 2(\text{mod. } 4)\text{, la seule fonction } 2\pi\text{- périodique solution de } \mathcal{E}_n \text{ est la fonction nulle}}$

Supposons maintenant $n \equiv 2 (\mathrm{mod.}\ 4)$, alors $(ik)^n = k^n$ peut être égal à 1 pour $k = 1$ ou $k = -1$. Les seuls coefficients éventuellement non nuls du développement en série de Fourrier sont c_1 et c_{-1}, c'est-à-dire a_1 et b_1. Auquel cas, en appliquant le théorème de Dirichlet, on a $y = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Réciproquement, il est aisé de vérifier que ces fonctions sont 2π-périodiques et solutions de $\mathcal{E}_n$.

$\boxed{\text{Si } n \equiv 0(\text{mod. } 4)\text{, les fonctions } a\cos(t) + b\sin(t) \text{ sont les solutions } 2\pi\text{-périodiques de } \mathcal{E}_n}$

On prend $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ si on veut des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et si on veut les solutions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ 2π-périodiques, on prend $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.