

Centrale-Supélec 2014

Filière TSI

Corrigé de l'épreuve Mathématiques I

Damien Broizat
TSI 2 Lycée Jules Ferry, Cannes

I Polynômes et nombres de Bernoulli

I.A - I.A.1) On fixe $P \in \mathbb{R}[X]$ et on procède par analyse-synthèse :

- Si P se décompose sous la forme $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en intégrant sur $[0, 1]$, on obtient (par linéarité de l'intégrale) :

$$\int_0^1 P(x)dx = \underbrace{\int_0^1 Q(x)dx}_{=0} + \int_0^1 \lambda dx = \lambda,$$

et donc

$$Q = P - \lambda = P - \int_0^1 P(x)dx.$$

Ceci montre (sous réserve d'existence) l'unicité de la décomposition.

- La décomposition précédemment obtenue convient car en posant

$$Q = P(t) - \int_0^1 P(x)dx \text{ et } \lambda = \int_0^1 P(x)dx, \text{ on a}$$

* $P = Q + \lambda,$

* $\lambda \in \mathbb{R},$

* $Q \in H$ car $\int_0^1 Q(x)dx = \int_0^1 (P(x) - \lambda) dx = \int_0^1 P(x)dx - \lambda = 0.$

On en déduit qu' il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

- I.A.2)** Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Cette fonction polynomiale possède une primitive (elle-même polynomiale), notée P . D'après la question précédente, on peut écrire $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où :

$$R = P' = (Q + \lambda)' = Q' + \underbrace{\lambda'}_{=0} = D(Q),$$

ce qui montre que tout $R \in \mathbb{R}[X]$ possède un antécédent dans H par D , c'est-à-dire D surjective.

- I.A.3)** En plus d'être linéaire et surjective, l'application D est injective car son noyau est nul. En effet, si $P \in H$ et $D(P) = 0$, alors P est constant et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc nul. D est donc une bijection linéaire, c'est-à-dire un isomorphisme.

I.A.4) a) La fonction Q est polynomiale car c'est manifestement une primitive sur \mathbb{R} de la fonction polynomiale P (elle est de la forme $x \mapsto \int_0^x P(t)dt + cste$).

Ensuite, en décomposant P suivant la base monomiale ($P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ et les a_k réels), on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^d a_k t^k \right) dt + \int_0^1 (t-1) \left(\sum_{k=0}^d a_k t^k \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^d a_k \left(\int_0^x t^k dt \right) + \sum_{k=0}^d a_k \int_0^1 (t^{k+1} - t^k) dt \\ &= \sum_{k=0}^d a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^d a_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 Q(x) dx = \sum_{k=0}^d a_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{k=0}^d a_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 Q(x) dx = \sum_{k=0}^d a_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{k=0}^d a_k \left(\frac{-1}{(k+2)(k+1)} \right) = 0,$$

et donc $\boxed{Q \in H}$.

b) Q est un polynôme de H tel que $Q' = P$, c'est donc (d'après **I.A.3**) l'unique polynôme de H vérifiant cette propriété, et donc $\boxed{Q = \varphi(P)}$.

I.B - I.B.1) Pour tout réel x , on a, en utilisant la question **I.A.4**) :

$$B_1(x) = \varphi(B_0)(x) = \int_0^x dt + \int_0^1 (t-1)dt = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = \varphi(B_1)(x) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2} \right) dt + \int_0^1 (t-1) \left(t - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12},$$

$$\text{donc } \boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}} \text{ et } \boxed{B_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}(X^2 - X + \frac{1}{6})}.$$

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ est une primitive de B_n , donc

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B_n(x) dx.$$

Mais puisque $\varphi(\mathbb{R}[X]) = H$, on a $B_n \in H$ pour tout $n \geq 1$, donc

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0 \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ c'est-à-dire } \boxed{\forall n \geq 2, B_n(0) = B_n(1)}.$$

I.C - I.C.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$C'_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} \left((-1)^{n+1} B_{n+1}(1-x) \right) = (-1)^{n+2} B'_{n+1}(1-x).$$

Mais B_{n+1} est une primitive de B_n , donc

$$C'_{n+1}(x) = (-1)^n B_n(1-x) = C_n(x),$$

ce qui montre que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, C'_{n+1} = C_n}$.

I.C.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme C_{n+1} est dans H car

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(1-x)dx = (-1)^{n+1} \int_1^0 B_{n+1}(y)(-dy)$$

(avec le changement de variable $y = 1 - x$), c'est-à-dire

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(y)dy,$$

et $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ est dans H , donc $\int_0^1 B_{n+1}(y)dy = 0$, ce qui entraîne

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = 0.$$

Or, d'après la question précédente, C_{n+1} est une primitive de C_n .

D'après **I.A.3)**, le polynôme C_{n+1} est donc la seule primitive de C_n qui est dans H , c'est-à-dire $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

I.C.3) On a $C_0 = B_0 = 1$ et $\begin{cases} C_{n+1} = \varphi(C_n) \\ B_{n+1} = \varphi(B_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc une récurrence triviale montre que $C_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie $(-1)^n B_n(1-x) = B_n(x)$, et donc (en multipliant par $(-1)^n$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)}.$$

I.C.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation précédemment obtenue implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, B_{2n+1}(1-x) = -B_{2n+1}(x).$$

En évaluant en $x = 0$, cela donne $B_{2n+1}(1) = -B_{2n+1}(0)$.

Mais $2n + 1 \geq 3$, donc d'après **I.B.2)**, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$.

On déduit de ces deux relations $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0$.

I.D - Le programme suivant, écrit en Maple, calcule et affiche la valeur de $B_n(x)$ pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ donnés :

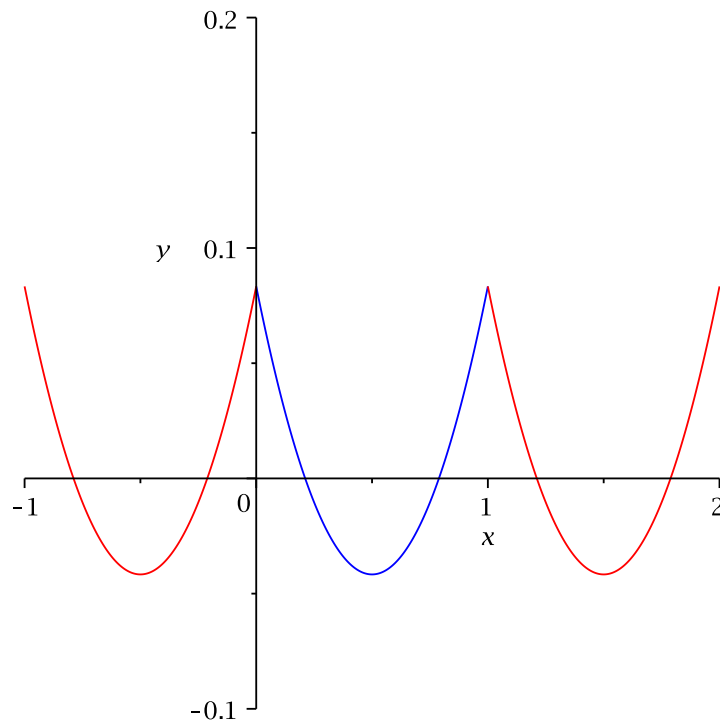
```
Bern:= proc(n,x)
local k, B, expr, y;
B:= t->1;
# on initialise B avec la fonction constante égale à 1 (pas le nombre 1 !)
for k from 1 to n
do
expr:= int(B(t), t=0..y)+int((t-1)*B(t), t=0..1);
# attention, la variable 'x' ne doit pas être utilisée ici !
B:= unapply(expr, y);
# pour transformer l'expression calculée en fonction de la variable y
end do;
print(B(x));
# on affiche la valeur de la fonction B au point x
end proc;
```

II Développement de Fourier

II.A - II.A.1) D'après **I.B.1)**, on a $\forall x \in]0, 1[$, $\overline{B_2}(x) = B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$, et

$$\overline{B_2}(0) = \frac{B_2(0) + B_2(1)}{2} = \frac{1}{12} = B_2(0).$$

Le graphe de la restriction de $\overline{B_2}$ à $]0; 1[$ est donc une parabole, qu'on prolonge par 1-périodicité sur \mathbb{R} .



II.A.2) Vu que $\overline{B_2}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$ pour tout $x \in]0; 1[$, la fonction $\overline{B_2}$ est continue sur $]0; 1[$ (car polynomiale). En outre, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \overline{B_2}(x) = \frac{1}{12} = \overline{B_2}(0)$, et par périodicité, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \overline{B_2}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \overline{B_2}(x) = \frac{1}{12} = \overline{B_2}(0)$, donc $\overline{B_2}$ est continue en 0. Par périodicité, on en déduit que $\overline{B_2}$ est continue sur \mathbb{R} .

En outre, la restriction de $\overline{B_2}$ à l'intervalle $]0; 1[$ est de classe C^1 (c'est un polynôme), et se prolonge en une fonction polynomiale sur $[0; 1]$, qui est donc de classe C^1 sur $[0; 1]$.

On en déduit par périodicité que $\overline{B_2}$ est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

En revanche, $\overline{B_2}$ n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R} car elle n'est même pas dérivable en 0, puisque

$$\forall h \in]0; 1[, \begin{cases} \frac{\overline{B_2}(h) - \overline{B_2}(0)}{h} = \frac{B_2(h) - B_2(0)}{h} = \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{h}{2}}{h} = \frac{h-1}{2} \\ \frac{\overline{B_2}(-h) - \overline{B_2}(0)}{-h} = \frac{B_2(1-h) - B_2(1)}{-h} = \frac{\frac{(1-h)^2}{2} - \frac{1-h}{2}}{-h} = \frac{1-h}{2} \end{cases},$$

ce qui entraîne $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overline{B_2}(h) - \overline{B_2}(0)}{h} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overline{B_2}(h) - \overline{B_2}(0)}{h}$.

II.A.3) Pour tout $x \in]0; 1[$, on a $\overline{B_1}(x) = B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et

$$\overline{B_1}(0) = \frac{B_1(0) + B_1(1)}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 0.$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \overline{B_1}(x) = -\frac{1}{2} \neq \overline{B_1}(0)$, ce qui montre que $\overline{B_1}$ n'est pas continue.

II.B - II.B.1) La fonction \overline{P} coïncide avec le polynôme P sur $]0; 1[$, elle est donc de classe C^1 sur $]0; 1[$, et cette restriction admet un prolongement polynomial, qui est donc de classe C^1 sur $[0; 1]$. Par 1-périodicité, on en déduit que

\overline{P} est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

En outre, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \overline{P}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = P(0)$, et (par périodicité de \overline{P})

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \overline{P}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \overline{P}(1+x) = \lim_{y \rightarrow 1^-} P(y) = P(1).$$

Donc \overline{P} est continue en 0 si et seulement si $P(0) = P(1)$ (cette condition est clairement nécessaire et elle suffisante, puisqu'elle entraîne $\overline{P}(0) = \frac{P(0)+P(1)}{2} = P(0) = \lim_{0^+} \overline{P} = P(1) = \lim_{0^-} \overline{P}$).

Vu que \overline{P} est déjà continue sur $]0, 1[$ et 1-périodique, on en déduit que

\overline{P} est continue sur \mathbb{R} si et seulement si $P(0) = P(1)$.

II.B.2) La fonction \overline{P} est 1-périodique et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier

$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(2k\pi x) + \beta_k \sin(2k\pi x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, vers le réel

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x^+} \overline{P} + \lim_{x^-} \overline{P} \right), \text{ où les coefficients de Fourier de } \overline{P} \text{ sont donnés par}$$

$$\alpha_0 = \int_0^1 \overline{P}(t) dt = \int_0^1 P(t) dt,$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \alpha_k = 2 \int_0^1 \overline{P}(t) \cos(2k\pi t) dt = 2 \int_0^1 P(t) \cos(2k\pi t) dt \\ \beta_k = 2 \int_0^1 \overline{P}(t) \sin(2k\pi t) dt = 2 \int_0^1 P(t) \sin(2k\pi t) dt \end{cases}$$

En outre, $\frac{1}{2} \left(\lim_{x^+} \overline{P} + \lim_{x^-} \overline{P} \right) = \overline{P}(x)$ si $x \in]0; 1[$ (puisque \overline{P} est continue sur $]0; 1[$), et $\frac{1}{2} \left(\lim_{0^+} \overline{P} + \lim_{0^-} \overline{P} \right) = \frac{P(0) + P(1)}{2} = \overline{P}(0)$, donc l'application du théorème de Dirichlet donne la relation

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \overline{P}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(2k\pi x) + \beta_k \sin(2k\pi x)).$$

Par 1-périodicité de \overline{P} et du développement en série de Fourier, on en déduit que la relation précédente reste vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II.C - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **I.B.2)** et **I.C.3)**, le polynôme B_{2n} vérifie les relations :

$$B_{2n}(0) = B_{2n}(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_{2n}(1-x) = B_{2n}(x).$$

La première relation entraîne (d'après **II.B.1)**) que la fonction 1-périodique $\overline{B_{2n}}$ est continue sur \mathbb{R} . De plus, en vertu de la seconde relation, on a

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \overline{B_{2n}}(-x) = \overline{B_{2n}}(1-x) = B_{2n}(1-x) = B_{2n}(x) = \overline{B_{2n}}(x).$$

En utilisant encore la périodicité de $\overline{B_{2n}}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B_{2n}}(-x) = \overline{B_{2n}}(x),$$

et donc que $\overline{B_{2n}}$ est paire.

II.D - II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_0(n) = \int_0^1 B_{2n}(x) dx = 0$ car $B_{2n} \in H$ (puisque $2n \geq 1$).

II.D.2) Pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a, en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} I_k(n+1) &= \int_0^1 B_{2n+2}(x) \cos(2k\pi x) dx \\ &= \underbrace{\left[B_{2n+2}(x) \frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 B_{2n+1}(x) \frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi} dx \\ &= \left[B_{2n+1}(x) \frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 B_{2n}(x) \frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2} dx \\ &= \frac{B_{2n+1}(1) - B_{2n+1}(0)}{(2k\pi)^2} - \frac{I_k(n)}{(2k\pi)^2}. \end{aligned}$$

Vu que $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0$ (d'après **I.C.4**), on en déduit la relation

$$\boxed{I_k(n+1) = -\frac{I_k(n)}{(2k\pi)^2}}.$$

II.D.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après le début du calcul fait à la question précédente (qui reste valable pour $n = 0$) :

$$I_k(1) = \int_0^1 B_2(x) \cos(2k\pi x) dx = \frac{B_1(1) - B_1(0)}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi)^2} \underbrace{\int_0^1 \cos(2k\pi x) dx}_{=0}$$

(puisque $B_0 = 1$). Mais $B_1(1) - B_1(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, donc $\boxed{I_k(1) = \frac{1}{(2k\pi)^2}}$.

II.D.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\overline{B_{2n}}$ étant 1-périodique et paire, ses coefficients de Fourier $(\beta_k)_{k \geq 1}$ sont nuls. D'après **II.B.2**, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B_{2n}}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(2k\pi x).$$

Or, $\alpha_0 = \int_0^1 B_{2n}(x) dx = I_0(n) = 0$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = 2I_k(n)$.

La relation établie en **II.D.2**) implique alors (par une récurrence sur n) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_k(n) = -\frac{I_k(n-1)}{(2k\pi)^2} = \dots = \frac{(-1)^{n-1} I_k(1)}{((2k\pi)^2)^{n-1}},$$

c'est-à-dire $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, I_k(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}}$. En reportant ces valeurs dans le développement en série de Fourier de $\overline{B_{2n}}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{B_{2n}}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} \cos(2k\pi x).$$

En restreignant à l'intervalle $[0; 1]$, on en déduit

$$\boxed{\forall x \in [0; 1], \quad B_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}} \cos(2k\pi x)}.$$

II.D.5) Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2n \geq 2 > 1$, donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{(2n)}}$ est convergente

(critère de Riemann), ce qui prouve l'existence de S_{2n} .

En outre, en évaluant la relation obtenue en **II.D.4)** en $x = 0$, on obtient

$$b_{2n} = 2(-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{(2\pi)^{2n}},$$

c'est-à-dire $S_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (2\pi)^{2n} b_{2n}$.

II.D.6) La relation précédente utilisée avec $n = 1$ donne $S_2 = \frac{4\pi^2}{2} b_2 = 2\pi^2 \times \frac{1}{12}$,

c'est-à-dire $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$.

III La formule d'Euler Mac-Laurin

III.A - Soit $n \geq 2$. En intégrant par parties deux fois, on a

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 B_{2n}(x) f^{(2n)}(x) dx = \left[B_{2n}(x) f^{(2n-1)}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 B'_{2n}(x) f^{(2n-1)}(x) dx \\ &= B_{2n}(1) f^{(2n-1)}(1) - B_{2n}(0) f^{(2n-1)}(0) - \int_0^1 B_{2n-1}(x) f^{(2n-1)}(x) dx \\ &= B_{2n}(1) f^{(2n-1)}(1) - B_{2n}(0) f^{(2n-1)}(0) \\ &\quad - \left[B_{2n-1}(x) f^{(2n-2)}(x) \right]_0^1 + \int_0^1 B_{2n-2}(x) f^{(2n-2)}(x) dx \\ &= B_{2n}(1) f^{(2n-1)}(1) - B_{2n}(0) f^{(2n-1)}(0) \\ &\quad - B_{2n-1}(1) f^{(2n-2)}(1) + B_{2n-1}(0) f^{(2n-2)}(0) + \int_0^1 B_{2n-2}(x) f^{(2n-2)}(x) dx. \end{aligned}$$

Or, $B_{2n}(0) = B_{2n}(1) = b_{2n}$ et $B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}(1) = 0$ (puisque $2n - 1 \geq 3$), donc

on peut réécrire $J_n = b_{2n} (f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)) + J_{n-1}$.

III.B - On refait le même calcul avec $n = 1$:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 B_2(x) f^{(2)}(x) dx \\ &= B_2(1) f'(1) - B_2(0) f'(0) - B_1(1) f(1) + B_1(0) f(0) + \int_0^1 \underbrace{B_0(x)}_{=1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Vu que $B_2(1) = B_2(0) = b_2$ et que $B_1(1) = \frac{1}{2}$ et $B_1(0) = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$J_1 = b_2(f'(1) - f'(0)) - \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) + \int_0^1 f(x) dx,$$

c'est-à-dire $\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - b_2(f'(1) - f'(0)) + J_1$.

III.C - Une récurrence triviale à partir de la relation obtenue en **III.A** donne

$$\begin{aligned} J_n &= b_{2n} (f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)) + J_{n-1} \\ &= b_{2n} (f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)) + b_{2n-2} (f^{(2n-3)}(1) - f^{(2n-3)}(0)) + J_{n-2} \\ &\dots \\ &= b_{2n} (f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)) + \dots + b_4 (f^{(3)}(1) - f^{(3)}(0)) + J_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $J_n = \sum_{k=2}^n b_{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) \right) + J_1$ (avec la convention de somme

nulle si $n = 1$). Or, d'après **III.B**, $J_1 = b_2(f'(1) - f'(0)) - \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) + \int_0^1 f(x)dx$,
donc

$$J_n = \sum_{k=2}^n b_{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) \right) + b_2(f'(1) - f'(0)) - \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) + \int_0^1 f(x)dx,$$

$$\text{ce qui se réécrit } \boxed{\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \sum_{k=1}^n b_{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) \right) + J_n}.$$

III.D - Par composition, la fonction $f : x \mapsto g((1-x)a + bx)$ est de classe C^{2n} sur $[0, 1]$ (puisque $\forall x \in [0, 1]$, $(1-x)a + bx \in [a; b]$ et $g \in C^{2n}([a; b], \mathbb{C})$).

De plus :

$$\forall k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, \quad f^{(k)}(x) = (b-a)^k g^{(k)}((1-x)a + bx).$$

Donc, l'application de la formule de la question **III.C** à la fonction f donne :

$$\int_0^1 g((1-t)a + bt)dt = \frac{g(b) + g(a)}{2} - \sum_{k=1}^n b_{2k}(b-a)^{2k-1} \left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a) \right) + J_n,$$

$$\text{avec } J_n = \int_0^1 B_{2n}(t)(b-a)^{2n} g^{(2n)}((1-t)a + bt)dt.$$

Or, $\int_0^1 g((1-t)a + bt)dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$ (en posant $x = (1-t)a + bt$), donc

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx = \frac{g(b) + g(a)}{2} - \sum_{k=1}^n b_{2k}(b-a)^{2k-1} \left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a) \right) + J_n.$$

En multipliant cette égalité par $b-a$, on obtient bien

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx = (b-a) \frac{g(b) + g(a)}{2} - \sum_{k=1}^n (b-a)^{2k} b_{2k} \left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a) \right) + R_n},$$

$$\text{avec } \boxed{R_n = (b-a)J_n = \int_0^1 (b-a)^{2n+1} B_{2n}(t) g^{(2n)}((1-t)a + bt)dt}.$$

IV La formule de Stirling pour la fonction Γ

IV.A - • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[a, b]$ avec $0 < a < b$. L'intégrale $\Gamma(x)$ est donc impropre en 0 et $+\infty$.

- En outre, on a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, donc (par le critère des équivalents pour les intégrales impropres de fonctions positives) l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$, donc elle converge si et seulement si $1-x < 1$, i.e. $\boxed{x > 0}$.

- De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ (évident si $x+1 \leq 0$, par croissance comparée si $x+1 > 0$). D'où, pour t suffisamment grand, on a $t^{x+1}e^{-t} \leq 1$, et donc $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$. On en déduit par comparaison de fonctions positives que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ converge pour tout réel x .

- L'intégrale impropre $\Gamma(x)$ converge ssi les intégrales $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ convergent, ce qui équivaut à $x > 0$.

L'ensemble de définition de la fonction Γ est donc $]0, +\infty[$.

IV.B - IV.B.1) Soit $x > 0$ et $0 < \varepsilon < T$. En intégrant par parties, on a

$$\int_{\varepsilon}^T t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{t=\varepsilon}^{t=T} + \int_{\varepsilon}^T x t^{x-1} e^{-t} dt = -T^x e^{-T} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x \int_{\varepsilon}^T t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\int_0^T t^x e^{-t} dt = -T^x e^{-T} + x \int_0^T t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Enfin, en faisant tendre $T \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -0 + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

c'est-à-dire $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

IV.B.2) On en déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$:

- C'est clair pour $n = 0$ car $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\Gamma(n+1) = n!$, alors d'après la question précédente :

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!,$$

ce qui montre que la propriété est héréditaire.

IV.C - On applique le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre pour montrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

- La fonction de deux variables f définie par $f(x; t) = t^{x-1}e^{-t}$ admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de $]0, +\infty[^2$, donnée par :

$$\forall (x; t) \in]0, +\infty[^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x; t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}.$$

- Pour tout $t > 0$, la fonction d'une variable $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x; t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x; t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (voir **IV.A**).
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x; t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, car :

* au voisinage de $+\infty$, on a $|(\ln t)t^{x-1}e^{-t}| \leq t^x e^{-t}$ et $t \mapsto t^x e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

* au voisinage de 0, on a $|\ln t|t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} |\ln t|t^{x-1}$, et $t \mapsto |\ln t|t^{x-1}$ est intégrable en 0 : en effet, $t^{1-\frac{x}{2}}|\ln t|t^{x-1} = t^{\frac{x}{2}}|\ln t| \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, ce qui entraîne que $|\ln t|t^{x-1} \leq \frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ pour t voisin de 0, et permet de conclure à l'intégrabilité en 0, puisque $1 - \frac{x}{2} < 1$.

• Fixons $0 < a < b$. Pour tout $x \in [a; b]$ et $t > 0$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x; t) \right| = |\ln t|t^{x-1}e^{-t} \leq \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases},$$

et la fonction $\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (et indépendante de x) : en effet, elle est continue sur $]0, +\infty[$ et son intégrabilité en 0 et en $+\infty$ a déjà été prouvée au point précédent.

On déduit de cela que $\Gamma \in C^1([a; b], \mathbb{R})$ pour tout $b > a > 0$, donc que $\Gamma \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, et que

$$\forall x > 0, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x; t) dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t} dt.$$

IV.D - IV.D.1) Pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x) > 0$, car c'est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle ($t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$) sur un intervalle non réduit à un point. On a donc (d'après ce qui est admis) $\Gamma \in C^\infty(]0, +\infty[,]0, +\infty[)$. Par composition avec la fonction $\ln \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, on en déduit que $g = \ln \circ \Gamma \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, ce qui implique évidemment que

$$g \in C^{2n}(]0, +\infty[, \mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

IV.D.2) Pour tout $x > 0$, on a (en utilisant **IV.B.1**)

$$g(x+1) - g(x) = \ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln(x\Gamma(x)) - \ln(\Gamma(x)),$$

$$\text{c'est-à-dire } g(x+1) - g(x) = \ln(x).$$

IV.D.3) Notons G une primitive de g (elle existe car g est continue sur $]0, +\infty[$). On a, pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{x+1} g(t) dt = G(x+1) - G(x),$$

donc en dérivant (G est de classe C^1), on obtient

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x+1} g(t) dt \right) = g(x+1) - g(x) = \ln(x) = \frac{d}{dx} (x \ln(x) - x).$$

Les deux fonctions $x \mapsto \int_x^{x+1} g(t) dt$ et $x \mapsto x \ln(x) - x$ ont la même dérivée sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc elles diffèrent d'une constante.

$$\text{Finalement } \exists K \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \int_x^{x+1} g(t) dt = x \ln(x) - x + K.$$

IV.D.4) Fixons $x > 0$ et appliquons la formule d'Euler Mac-Laurin à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ (obtenue en **III.D**) à la fonction g (qui est bien de classe C^{2p}) sur l'intervalle $[x, x+1]$. On obtient

$$\int_x^{x+1} g(t) dt = \frac{g(x+1) + g(x)}{2} - \sum_{k=1}^p b_{2k} \left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x) \right) + R_p(x),$$

avec $R_p(x) = \int_0^1 B_{2p}(t)g^{(2p)}((1-t)x+t(x+1))dt = \int_0^1 B_{2p}(t)g^{(2p)}(x+t)dt$.

En utilisant la question **IV.D.3**), on obtient la formule

$$x \ln(x) - x + K = \frac{g(x+1) + g(x)}{2} - \sum_{k=1}^p b_{2k} \left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x) \right) + R_p(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{g(x+1) + g(x)}{2} = x \ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^p b_{2k} \left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x) \right) - R_p(x).$$

Enfin, on obtient par dérivation composée la formule :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}(g(x+1) - g(x)),$$

donc, par la question **IV.D.2**) :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}(\ln(x)) = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^{-1}).$$

On obtient par une récurrence aisée :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = (-1)(-2) \cdots (-m+1)x^{-m},$$

ou encore

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{x^m}.$$

Ceci implique : $\forall k \in \mathbb{N}^*, g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x) = \frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}}$, et donc

$$\frac{g(x+1) + g(x)}{2} = x \ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^p b_{2k} \frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}} - R_p(x),$$

avec $R_p(x) = \int_0^1 B_{2p}(t)g^{2p}(t+x)dt$, ce qui est la formule voulue.