

# CCP TSI 2012 – MATH 1 – CORRIGÉ

## EXERCICE

1. Simple calcul.
2.  $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(P + \lambda.Q) = (X + 2)(P + \lambda.Q) - X(P + \lambda.Q)(X + 1) = (X + 2)P - XP(X + 1) + \lambda((X + 2)Q - XQ(X + 1)) = \varphi(P) + \lambda.\varphi(Q)$ .
3.  $\varphi(X^k) = (X + 2)X^k - X(X + 1)^k = X^{k+1} + 2X^k - X \left( X^k + kX^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}X^{k-2} \dots \right) = (2 - k)X^k - \frac{k(k-1)}{2}X^{k-1} + \dots$

Le terme dominant de  $\varphi(X^k)$  est donc  $\begin{cases} (2 - k)X^k & \text{si } k \neq 2 \\ -X & \text{si } k = 2 \end{cases}$ .

4.  $\varphi$  est déjà linéaire et on déduit de la question précédente  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .  $\varphi$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
5. a. Par le calcul :  $\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = X, \quad \varphi(X^2) = -X, \quad \varphi(X^3) = -X - 3X^2 - X^3$  d'où l'expression de  $M$ .

$$\text{b. } Q(X) = \begin{vmatrix} 2 - X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - X & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -X & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - X \end{vmatrix} = (2 - X)(1 - X)(-X)(-1 - X).$$

- c. Les valeurs propres de  $\varphi$  sont les racines de  $Q : \{2, 1, 0, -1\}$ .
- d.  $\varphi$  est diagonalisable car ses quatre valeurs propres sont toutes réelles et simples (condition suffisante de diagonalisabilité).
- e. Les deux premières colonnes de  $M$  étant diagonales, on a immédiatement :  $\ker(\varphi - 2\text{Id}) = \text{Vect}(1)$  et  $\ker(\varphi - \text{Id}) = \text{Vect}(X)$ .

Dans  $M, C_2 + C_3 = 0$  donc  $X + X^2 \in \ker \varphi$  et  $\ker \varphi = \text{Vect}(X + X^2)$

Dans  $M + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_4 + 3C_3 + 2C_2 = 0$  donc  $2X + 3X^2 + X^3 \in \ker(\varphi + \text{Id})$  et  $\ker(\varphi + \text{Id}) = \text{Vect}(2X + 3X^2 + X^3)$

## PROBLÈME

### Partie I - un exemple numérique

1.  $x_{H_i} = x_{B_i}$  et  $y_{H_i} = mx_{H_i} + p$  donc  $(B_i H_i)^2 = (y_{B_i} - y_{H_i})^2 = (y_i - mx_i - p)^2$ .
2. Il suffit d'injecter les valeurs des  $x_i$  et  $y_i$  dans  $\delta(m, p)$ .
3.  $S$  est la matrice de  $q$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  donc, d'après le cours,  $q(m, p) = {}^t U.S.U$
4.  $\chi_S(X) = \begin{vmatrix} 6 - X & 2 \\ 2 & 3 - X \end{vmatrix} = X^2 - 9X + 14 = (X - 2)(X - 7)$ .  
Les valeurs propres de  $S$  sont donc  $\lambda = 2$  et  $\mu = 7$ .
5.  $\lambda + \mu = \text{tr } S = 9$  et  $\lambda \times \mu = \det S = 14$
6.  $S$  est symétrique réelle, l'existence de  $P$  est assurée par un théorème du cours.
7.  $q(m, p) = {}^t U S U = {}^t U P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^t P U = {}^t ({}^t P U) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} ({}^t P U) = \lambda X^2 + \mu Y^2$ .
8. On sait déjà que les sous-espaces propres de  $S$  sont des droites orthogonales.  
Dans  $S - 2I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C_1 - 2C_2 = 0$  donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker(S - 2I_2)$  et  $\ker(S - 2I_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$   
 $\ker(S - 7I_2) = (\ker(S - 2I_2))^\perp = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
9.  $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
10. Par la formule du changement de base,  $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} X + 2Y \\ -2X + Y \end{pmatrix}$

11.  $\delta(m, p) = q(m, p) - 2p + 3 = 2X^2 + 7Y^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}(-2X + Y) + 3$  On absorbe :

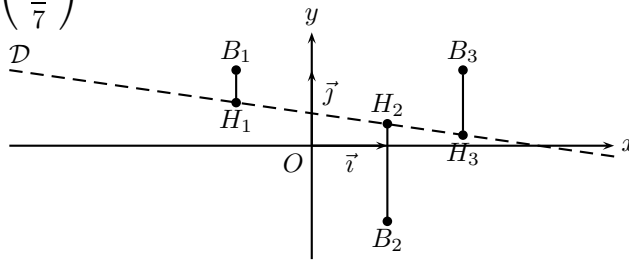
$$= 2 \left[ X^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}X \right] + 7 \left[ Y^2 - \frac{2}{7\sqrt{5}}Y \right] + 3 = 2 \left[ \left( X + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{1}{5} \right] + 7 \left[ \left( Y - \frac{1}{7\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{1}{49 \times 5} \right] + 3$$

ce qui est l'expression recherchée avec  $K = \frac{18}{7}$ .

12. On en déduit que  $\forall (m, p) \in \mathbb{R}^2, \delta(m, p) \geq K$  et que cette valeur  $K$  est atteinte pour  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13.  $(m_0, p_0) = P \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ .

14. Dessin :



### Partie II - distance en dimension 3

1. a.  $(C_1, C_2)$  est l'image de la base canonique donc engendre  $\text{Im } f$  et  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas proportionnelles donc forment une famille libre.

On en déduit que  $\text{rg } f = \dim(\text{Im } f) = 2$  et, par le théorème du rang,  $\dim(\ker f) = 3 - 2 = 1$

b.  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Im } f \iff \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 3y - 2z = 0$

c.  $f$  est surjective car  $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ , n'est pas injective car  $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$  donc n'est pas bijective.

d. •  $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}C_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

•  $\vec{f}_2 = C_2 - (C_2 | \vec{u}_1) \vec{u}_1 = C_2 - \frac{1}{6}(C_2 | C_1) C_1 = C_2 - \frac{1}{3}C_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. a. On laisse donc tomber la base précédemment trouvée par celle-ci, dont on prouve aisément que les vecteurs vérifient bien l'équation trouvée en II.1.b. et sont orthonormés.

b. Avec la formule rappelée dans l'énoncé,

$$Z_0 = (Y_0 | \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (Y_0 | \vec{u}_2) \vec{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{\sqrt{70}} \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c.  $A \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} m = -\frac{1}{7} \\ p = \frac{3}{7} \end{cases}$

Cet antécédent est bien unique car  $f$  est injective.

3. a.  $AX - Y_0 = \begin{pmatrix} -m + p - 1 \\ m + p + 1 \\ 2m + p - 1 \end{pmatrix}$

$$\|AX - Y_0\|^2 = (m^2 + p^2 + 1 - 2mp + 2m - 2p) + (m^2 + p^2 + 1 + 2mp + 2m + 2p) + (4m^2 + p^2 + 1 + 4mp - 4m - 2p) = 6m^2 + 3p^2 + 4mp - 2p + 3 = \delta(m, p)$$

b. D'après ce qui précède,  $\inf \{ \delta(m, p) / (m, p) \in \mathbb{R}^2 \} = \inf \{ \|AX - Y_0\|^2 / X \in \mathbb{R}^2 \} = \inf \{ \|Y - Y_0\|^2 / Y \in \text{Im } f \} = d(Y_0, \text{Im } f) = d(Y_0, Z_0)^2$  d'après la propriété rappelée dans l'énoncé.

c. On retrouve bien en II.2.c. les valeurs trouvées en I.13..

La droite de régression linéaire a pour équation  $y = \frac{1}{7}(-x + 3)$