Préambule

1/ f' est continue sur le fermé borné $[a,b]$, donc bornée, d'où l'existence de M.

2/ On peut noter que, pour tout k entier, $\int_a^b f'(t)e^{ikt}dt$ existe car on intègre sur un intervalle borné une fonction continue à valeur dans $\mathbb{C}$.

On a $|\int_a^b f'(t)e^{ikt}dt| \leqslant \int_a^b |f'(t)e^{ikt}|dt \leqslant M\int_a^b dt = M(b-a)$ (NB :$|e^{ikt}| = 1$ car $kt \in \mathbb{R}$)

Donc $lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)e^{ikt}dt\right) = 0$

3/ L'intégrale proposée existe pour tout k, comme en 2.

On pose, pour k non nul, $\left\{\begin{array}{c} u(t) = f(t) \\ v'(t) = e^{ikt} \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{c} u'(t) = f'(t) \\ v(t) = \frac{1}{ik}e^{ikt} \text{ convient} \end{array}\right\}$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$ donc :

$\int_{[a,b]} uv' = [uv]_a^b - \int_{[a,b]} u'v = \frac{1}{ik}(e^{ib}f(b) - e^{ia}f(a)) - \frac{1}{ik}\int_a^b e^{ikt}f'(t)dt$

Or $|\frac{1}{ik}(e^{ib}f(b) - e^{ia}f(a))| \leqslant \frac{1}{k}(|f(b)|+|f(a)|)$ donc $lim\left(\frac{1}{ik}(e^{ib}f(b) - e^{ia}f(a))\right)_{k\in\mathbb{N}^*} = 0$ et la question précédente règle le cas de $\frac{1}{ik}\int_a^b e^{ikt}f'(t)dt$ d'où le résultat demandé.

PARTIE 1

1/ a/ on a $\frac{sin(2nt)}{tan(t)} \sim_0 2n$ donc $lim_{0^+}\left(\frac{sin(2nt)}{tan(t)}\right) = 2n$ et $sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $lim_{\frac{\pi}{2}^-}(tant) = +\infty$ donc $lim_{\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{sin(2nt)}{tant}\right) = 0$

Notons $H(t) = \frac{sin(2nt)}{tan(t)}$ H est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ donc l'intégrale I_n est impropre en ses deux bornes mais comme H y admet des limites, la fonction H est bornée sur l'intervalle borné $]0,\frac{\pi}{2}[$ d'où la convergence de l'intégrale.

b/ $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2t)}{tan(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cos^2tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+cos(2t))dt = \frac{\pi}{2}$

c/ $sin((2n+2)t) - sin(2nt) = 2cos((2n+1)t)sint$

d/ On a, pour n non nul, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{sin((2n+2)t)-sin(2nt)}{tant}\right)dt$ car les deux premières intégrales sont convergentes, donc

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cos((2n+1)t)sint}{tant}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cos((2n+1)t)costdt$

Donc, pour n non nul,

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos((2n+2)t) + cos(2nt))dt = \left[\frac{sin(2n+2)t}{(2n+2)} + \frac{sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ et donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = I_1 = \frac{\pi}{2}$

2/ Notons $S(t) = \frac{sin(2nt)}{t}$. S est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et admet une limite en 0, donc l'intégrale, impropre en 0, est convergente, comme en a/, de même pour $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sint}{t}dt$

3/ $\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{tant}$ est C^1 sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ comme différence de fonctions de classe C^1

Sur cet intervalle, $\phi(t) = \frac{tant-t}{t(tant)} =_{(0^+)} \frac{\frac{1}{3}t^3+o(t^4)}{t^2+o(t^3)} =_{(0^+)} \frac{\frac{1}{3}t+o(t^2)}{1+o(t)} =_{(0^+)} \frac{1}{3}t + o(t^2)$

ϕ admet donc un $DL_2(0^+)$ (donc un $DL_1(0)$) donc elle admet une limite nulle en 0 et son prolongement par continuité en 0 est dérivable en 0, de dérivée $1/3$.

Sur $]0,\frac{\pi}{2}[, \phi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(cos^2t)tan^2t} = \frac{t^2-sin^2t}{t^2sin^2t} =_{(0^+)} \frac{t^2-\left(t^2-\frac{2}{6}t^4+o(t^5)\right)}{t^4+o(t^5)} =_{(0^+)} \frac{1}{3} + o(t)$

Donc $lim_{0^+}\phi'(t) = \frac{1}{3}$ donc le prolongement est de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

D'autre part, $lim_{\frac{\pi}{2}^-}\phi = \frac{2}{\pi}$ ce qui permet un prolongement par continuité en $\frac{\pi}{2}$ de ϕ et $lim_{\frac{\pi}{2}^-}\phi' = 1 - \frac{4}{\pi^2}$, donc (conséquence classique du théorème des accroissements finis), ce prolongement est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ de dérivée $1-\frac{4}{\pi^2}$ .Il est donc de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

4/ On a, les deux premières intégrales étant convergentes, $J_n - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)sin(2nt)dt$

Donc $J_n - I_n = Im\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)e^{i2nt}dt\right)$. D'après le préliminaire, ϕ étant de classe C^1 sur le segment fermé borné$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $lim\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)e^{i2nt}dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = 0$, donc $lim(J_n - I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = 0$

Comme I_n est constante, on peut en conclure que $lim(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

5/ a/ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$ est impropre en l'infini.

On pose $\left\{\begin{array}{c} u(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = sint \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{c} u'(t) = \frac{-1}{t^2} \\ v(t) = -cos(t) \text{ convient} \end{array}\right\}$

u et v sont de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{2},+\infty[$, $lim_{+\infty}(uv)$ existe et vaut 0 donc les intégrales $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{cost}{t^2}dt$ sont de même nature.

Or $|\frac{cost}{t^2}| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Comme les fonctions sont positives, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |\frac{cost}{t^2}|dt$ est convergente, donc $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{cost}{t^2}dt$ est absolument convergente donc convergente, d'où la convergence de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$.

b/ On a $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)}{t}dt$. Pour n non nul, posons $u = 2nt$ Ce changement est affine donc permis et $J_n = \int_0^{n\pi} \frac{sin(u)}{u}du$

Nous savions que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}dt$ convergeait et la question précédente permet de conclure à la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$ et donc nous savons que $lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{sint}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$ donc $lim(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$

c/ On a donc, avec le 4/, $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

PARTIE 2

1/a/ On a clairement $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{sint}{t}dt = \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{sint}{t}dt$

On fait la même intégration par partie dans $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{sint}{t}dt$ que dans PARTIE 1 5/a/ (pas de problème de convergence ici) et donc :

$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{sint}{t}dt = \left[-\frac{cos(t)}{t}\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{cos(t)}{t^2}dt = \left(\frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi}\right) - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{cos(t)}{t^2}dt$

Donc $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{sint}{t}dt = \sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi}\right) - \sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{cos(t)}{t^2}dt\right)$

Or $\sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi}\right) = -\frac{1}{\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi}$ (phénomène télescopique classique...)

D'où le résultat demandé.

b/ La somme partielle de rang N de la série $\sum_{n>0}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{cos(t)}{t^2}dt\right)$ est $\int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{cos(t)}{t^2}dt$

et nous savons que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2}dt$ converge (PARTIE 1 5/a, le fait d'avoir π au lieu de $\frac{\pi}{2}$ comme borne inférieure de l'intégrale ne change rien)

D'où la convergence de la série proposée et donc

$lim\left(\sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{cos(t)}{t^2}dt\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2}dt$ donc

$lim\left(\int_{\pi}^{n\pi} \frac{sint}{t} dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2} dt$. La convergence de l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$ est acquise car $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sint}{t} dt$ est une intégrale définie au sens de Riemann et le 5/a/ permet de conclure. On a donc $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2} dt$ résultat qui s'obtenait directement par une IPP...??

2/a/

On a $|\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}| \leqslant \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ or $\sum \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est le DSE de sh(a), de rayon de convergence infini, d'où la convergence, pour tout a de $\sum \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Les séries étant à termes réels positifs, la majoration permet de conclure que $\sum |\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}|$ est convergente.

b/

Nous savons que, pour tout t réel, $sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right)$

Donc, pour tout t non nul, $\frac{sin(t)}{t} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right)$

Notons $h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ fonction définie sur $\mathbb{R}$. On a clairement $h(0) = 1$

Donc h coïncide avec ψ sur $\mathbb{R}$, d'où le résultat.

c/ Nous savons que, sur $[a,b] \subset]-R_{cv}, +R_{cv}[$ on peut intégrer termes à termes une série entière, donc :

$\int_0^a \psi(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\int_0^a t^{2n} dt}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = \int_0^a \frac{sint}{t} dt$ car ces fonctions, continues et coïncidant sur]0,a], admettent une limite en 0.

3/a/

On a $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ avec un rayon de convergence infini, donc ce développement est valable pour tout complexe z.

b/

On a, pour tout réel a, $\frac{(-1)^n a^n}{n!} Ré(e^{-int}) = Ré\left(\frac{(-1)^n a^n}{n!} e^{-int}\right) = Ré\left(\frac{(-ae^{-it})^n}{n!}\right)$

Comme la série $\sum \frac{(-ae^{-it})^n}{n!}$ est convergente pour tout t (on pose $z = -ae^{-it}$), son reste d'indice N, $\sum_{N+1}^{+\infty} \frac{(-ae^{-it})^n}{n!}$ a un sens et la partie réelle de ce reste aussi, notée $U_N(t)$

D'autre part, $|\frac{(-1)^n a^n}{n!} Ré(e^{-int})| \leqslant \frac{a^n}{n!}$ (NB: pour tout complexe u, $|$Ré$(u)| \leqslant |u|$ et $|e^{-int}| = 1$ pour tout t réel) donc, les deux séries étant convergentes,

$|U_n(t)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} Ré(e^{-int})| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$,reste de la série e^a. Ensuite, on majore $|\int_0^{\frac{\pi}{2}} U_n(t)dt|$ par $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |U_n(t)|dt$ et donc par $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.

c/ On a clairement $e^{-ae^{-it}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ae^{-it})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} e^{-int}$

d/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ré(1)dt = \frac{\pi}{2}$ et, pour n entier non nul,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ré(e^{-int})dt = Ré\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-int}dt\right) = Ré\left([-\frac{1}{in} e^{-int}]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = Ré(\frac{i}{n}(e^{-in\frac{\pi}{2}} - 1))$

Si n est pair $e^{-in\frac{\pi}{2}} - 1$ est réel et $Ré(\frac{i}{n}(e^{-in\frac{\pi}{2}} - 1)) = 0$

Si $n = 2q+1, e^{-i(2q+1)\frac{\pi}{2}} - 1 = (-1)^q(-i) - 1$ et $Ré(\frac{i}{n}(e^{-in\frac{\pi}{2}} - 1)) = \frac{(-1)^q}{2q+1}$.

e/ La possibilité d'intégrer une termes à termes sur un segment fermé borné contenu dans le domaine de convergence permet d'écrire que :

$Ré\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ae^{-it}} dt\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ré\left(e^{-ae^{-it}}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ré(e^{-int})dt$

Donc $Ré\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ae^{-it}} dt\right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1, n \text{ impair}}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ré(e^{-int})dt = \frac{\pi}{2} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{-a^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{(-1)^q}{(2q+1)}$

série dans laquelle on reconnait Partie 2 2/c/ $\frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{sint}{t}dt$.

f/ Notons $f(x,t) = e^{-xcos(t)}$

On a $f \in C^0\left(\mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ donc, pour tout couple de réels (a,b) avec a<b, on a $f \in C^0\left([a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ donc F est continue sur tout $[a,b]$ donc sur $\mathbb{R}$.

Notons $h(t) = e^{-acos(t)}$ alors $h'(t) = asin(t)h(t)$ donc h' est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et h est croissante sur cet intervalle.

On a donc $\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{-acos(t)})dt \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-acos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)dt = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{1}{\sqrt{a}}$

On a $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-acos(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-acos(t)}dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{-acos(t)})dt$

Or, sur $\left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right], 0 \leqslant e^{-acos(t)} \leqslant e^{-acos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} = e^{-asin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}$

Or $-asin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) =_{(+\infty)} -a\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + o(\frac{1}{a})\right) =_{(+\infty)} -\sqrt{a} + o(1)$

Donc $lim_{a\to+\infty}\left(e^{-asin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}\right) = 0$

Or, pourvu que $\left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$ soit un intervalle croissant (donc $a > \frac{4}{\pi^2}$, ce qui ne nuit pas puisque l'objectif est de faire tendre a vers $+\infty$...)

$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-acos(t)}dt \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)e^{-asin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-asin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}$

Donc $lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-acos(t)}dt\right) = 0$ comme $lim_{a\to+\infty}\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{-acos(t)})dt\right) = 0$

on en conclut que $lim_{a\to+\infty}F(a) = 0$.

g/ On a $e^{-ae^{-it}} = e^{-a(cost-isint)} = e^{-acos(t)}e^{iasin(t)}$

Donc $Ré\left(e^{-ae^{-it}}\right) = e^{-acos(t)}cos(asin(t)), Im\left(e^{-ae^{-it}}\right) = e^{-acos(t)}sin(asin(t))$

et $|e^{-ae^{-it}}| = e^{-acos(t)}$

h/ On a (toujours avec $a > \frac{4}{\pi^2}$)

$|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} Ré\left(e^{-ae^{-it}}\right)dt| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} |Ré(e^{-ae^{-it}})|dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} |e^{-ae^{-it}}|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-acos(t)}dt$

Comme on intègre une fonction positive, $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-acos(t)}dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-acos(t)}dt = F(a)$

Donc $lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} Ré\left(e^{-ae^{-it}}\right)dt\right) = 0$ et la majoration du f/iii/

permet d'affirmer que $lim_{a\to+\infty}\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} Ré\left(e^{-ae^{-it}}\right)dt\right) = 0$

Donc $lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ré\left(e^{-ae^{-it}}\right)dt\right) = 0$ or nous avons vu que

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ré\left(e^{-ae^{-it}}\right)dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{sint}{t}dt$ d'où la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$...