DS6 - corrigé concis - sujet CCINP PC 2022

Exercice 1

Q1 Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. D'après le théorème de division euclidienne, le reste $\varphi(P)$ dans la division euclidienne de AP par B (avec $\deg(B) = n+1$) est un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$; d'où $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

Q2 On a $A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$ avec $R_1 + \lambda R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ donc par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B : $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)$ d'où la linéarité de φ et avec Q1 $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.

Q3 La division euclidienne de AP par $B = X^3 + X^2 - X - 1$ s'écrit :
pour $P = 1$: $AP = A = B \times 0 + X^2 + 2X$ donc $\varphi(1) = 2X + X^2$.
pour $P = X$: $AP = AX = B \times 1 + X^2 + X + 1$ donc $\varphi(X) = X^2 + X + 1$.
pour $P = X^2$: $AP = AX^2 = B \times (X+1) + 2X + 1$ donc $\varphi(X^2) = 2X + 1$.
D'où la matrice φ dans $(1, X, X^2)$ demandée.

Q4 On calcule $\chi_M = (X+1)^2(X-3)$ donc $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\}$ et on trouve par résolution de système linéaire, $\ker(M + I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\ker(M - 3I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

Q5 $\dim(E_{-1}(M)) + \dim(E_3(M) = 3$ donc M est diagonalisable et φ aussi par conséquent.
On déduit de la question précédente une base de $\mathbb{C}_2[X]$, constituée de vecteurs propres de φ : $(1 - X, 1 - X^2, 1 + 2X + X^2)$.

Q6 La division euclidienne de AP par $B = X^3$ s'écrit :
pour $P = 1$, $AP = A = 0 \times B + A$ donc $\varphi(1) = A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
pour $P = X$, $AP = AX = \gamma B + \alpha X + \beta X^2$ donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$.
pour $P = X^2$, $AP = AX^2 = (\gamma X + \beta)B + \alpha X^2$ donc $\varphi(X^2) = \alpha X^2$.

Q7 T étant triangulaire, on a directement $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha\}$ donc
T diagonalisable $\Leftrightarrow$ T est semblable à $\alpha I_3 \Leftrightarrow T = \alpha I_3 \Leftrightarrow \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow P$ constant.

Q8 Soit $x \in [\![0, n]\!]$. $D(x_k) = P(x_k) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \underbrace{L_i(x_k)}_{=\delta_{i,k}} = P(x_k) - P(x_k) = 0$.

Q9 D possède $n+1$ racines d'après Q8 et $D \in \mathbb{C}_n[X]$ donc $D = 0$.

Q10 $(L_0, \cdots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$ d'après Q9 et elle est constituée de $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ donc il s'agit d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q11 On a $AL_k = BQ_k + R_k$ d'où en utilisant $B(x_j) = 0$:
$R_k(x_j) = A(x_j)L_k(x_j) - B(x_j)Q_k(x_j) = A(x_j)L_k(x_j) = A(x_j)\delta_{k,j}$.

Q12 D'après Q9, $\varphi(L_k) = R_k = \sum_{i=0}^{n} R_k(x_i)L_i = A(x_k)L_k$ par Q11.

Q13 D'après Q10 et Q12, $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ donc φ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{A(x_0), \cdots, A(x_k)\}$.

Exercice 2

Q14 On a pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (rayon de convergence $R = 1$).

Q15 Par dérivation terme à terme de la série entière précédente, sur son intervalle ouvert de convergence, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Q16 $(L_1 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})$.

Q17 Par Q16, σ-additivité (union disjointe) et indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}) = \mathbb{P}(F_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(P_i) + \mathbb{P}(P_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(F_i)$$

Et $\mathbb{P}(F_i) = \mathbb{P}(P_i) = 2^{-1}$ d'où $\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k}$.

Q18 $\mathbb{P}(L_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(L_1 \neq 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1 - \frac{2^{-1}}{1 - 2^{-1}} = 0$.

Q19 Par Q15, on a convergence absolue de la série et $\mathbb{E}(L_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(L_1 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k2^{-k} = \frac{2^{-1}}{(1 - 2^{-1})^2} = 2$.

La longueur moyenne de la première série est donc 2.

Q20 $N_1 = 1$ (variable aléatoire constante égale à 1 : $N_1(\Omega) = \{1\}$ et $\mathbb{P}(N_1 = 1) = 1$).
N_2 suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$: $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$.

Q21 $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Q22 L'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ indique qu'il n'y a pas de changement de série entre le lancer n et $n+1$ donc les deux évènements considérés correspondent à obtenir k séries durant les $n+1$ premiers lancers en terminant par 2 piles.

Par indépendance des évènements $(N_n = k) \cap P_n$ et P_{n+1} et l'égalité précédente :
$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}(N_n = k \cap P_n) \underbrace{\mathbb{P}(P_{n+1})}_{=1/2}$

Q23 Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements donné :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1})\end{aligned}$$

puis en utilisant Q22 et les relations admises :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n)\right) + \\ \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n)\right)\end{aligned}$$

Et par σ-additivité, $\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) = \mathbb{P}(N_n = k)$ car $(P_n \cup F_n = \Omega)$;
et $\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n) = \mathbb{P}(N_n = k-1)$ d'où l'égalité demandée.

Q24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après Q23 et en utilisant $\mathbb{P}(N_n = 0) = \mathbb{P}(N_n = n+1) = 0$:

$$\begin{aligned}G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_{n+1} = k)x^k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k)\, x^k + \frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)\, x^{k-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)\, x^k + \frac{x}{2}\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)\, x^j = \frac{1+x}{2} G_n(x)\end{aligned}$$

Q25 Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ d'après Q24 :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ G_n(x) = G_1(x)\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$$

Q26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n'(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} + \frac{x(n-1)}{2}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}$ d'où :

$$\mathbb{E}(N_n) = G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Q27 D'après Q25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par la formule du binôme de Newton :

$$G_n(x) = x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^k$$

D'où par unicité des coefficients de la fonction polynomiale G_n :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

Exercice 3

Q28 Par télescopage, $\Delta_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Donc $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-a}{n^2}$ avec $a = \frac{1}{2}$.

Q29 $(-\Delta_n) \sim \frac{a}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum_{n\geqslant 2} -\Delta_n$ donc $\sum_{n\geqslant 2} \Delta_n$ est convergente.

Q30 Je refais la démonstration du théorème du cours sur les séries télescopiques : on a par télescopage $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} \Delta_k$ donc par Q29, la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \Delta_k$.

Q31 Il suffit de poser $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$ (ou n'importe quel entier strictement supérieur à t). Alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $n > t$ (car $n_0 > t$) d'où l'expression de $f_n(t)$.

Q32 Soit $t \in]0, +\infty[$. Pour tout entier $n > t$,
$f_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \ln(t) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \ln(t) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-t+o(1)} \ln(t)$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}\ln(t)$.

Q33 Soit $t > 0$. Si $t \geqslant n$, $f_n(t) = 0$ donc l'inégalité est vérifiée.
Si $t < n$ alors $x = \frac{-t}{n} > -1$, donc on a $\ln(1+x) \leqslant x$ et par croissance de exp :
$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+x)} \leqslant e^{nx} = e^{-t}$ d'où $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln(t)|$.

Q34 $\varphi : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ et $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$.
Et par croissance comparée $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-t/2}\right)$ et $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q35 On peut utiliser Q33 et Q34 $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$ et f_n continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ d'où la convergence de l'intégrale I_n.
Autre solution : $t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$ continue sur $]0, n]$ et équivalent quand $t \to 0$ à $\ln(t)$.

Q36 Les question Q32, Q33, Q34 ont permis de vérifier les hypothèses du théorème de convergence dominée d'où $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

Q37 On pose $f(u) = \ln(1-u)$ et $g(u) = \frac{u^{n+1}-1}{n+1}$. f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
Et en utilisant $(1-v)^{n+1} - 1 \underset{v\to 0}{\sim} -(n+1)v$ (ou bien $u^{n+1} - 1 \underset{u\to 1}{\sim} (n+1)(u-1)$) :
$\lim_{u\to 1^-} f(u)g(u) = \lim_{v\to 0^+} f(1-v)g(1-v) = \lim_{v\to 0^+} -v\ln(v) = 0$ par croissance comparée.
Par théorème d'intégration par parties, l'intégrale $J_n = \int_0^1 f(u)g'(u)du$ est convergente si et seulement si $\int_0^1 f'(u)g(u)du = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}du$ est convergente.
Et $\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}du$ est convergente car $u \mapsto \frac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue sur $[0, 1[$ et prolongeable par continuité en 1 car $\lim_{u\to 1^-} \frac{u^{n+1}-1}{u-1} = n+1$.
Donc les intégrales sont convergentes et par intégration par parties avec $[f(u)g(u)]_0^1 = 0$:

$$J_n = \frac{-1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}du = \frac{-1}{n+1}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right)du = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 u^k du\right) = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$$

Q38 Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = 1 - \frac{t}{n}$ dans l'intégrale $I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)dt$ (en précisant $u \mapsto n(1-u)$ est C^1 strictement décroissante, bijective de $[0, 1[$ dans $]0, n]$).

Q39 Par Q37 et Q38, $I_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{-1}{n+1} - u_n\right)$.
On conclut par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus en utilisant Q36 et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$.