Concours Centrale Supélec - PC - 2025 - Maths 2 - 4h

APPROXIMATION UNIFORME DES FONCTIONS PÉRIODIQUES PAR DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

Proposition de corrigé - Michel Schweitzer, lycée Corneille Rouen

Partie A – Préliminaires

Q 1. Soit g la fonction sinus, elle est de classe C^1 et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g'(t)| = |\cos(t)| \leqslant 1$. Par inégalité des accroissements finis, on en déduit que g est 1-lipschitzienne et donc pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ on a $|g(t) - g(s)| \leqslant |t - s|$.
Soit $h > 0$, alors pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $|t - s| \leqslant h$ on aura $|g(s) - g(t)| \leqslant h$ et ainsi $\omega_g(h) = \sup\limits_{|t-s|\leqslant h} |g(s) - g(t)| \leqslant h$.

Q 2. (a) Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. Puisque g est continue, par théorème des bornes atteintes, g est bornée sur $[0, 2\pi]$. Par 2π-périodicité, on en déduit que g est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit M une borne de $|g|$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a $|g(s) - g(t)| \leqslant 2M$.
Soit $h > 0$ fixé, l'ensemble $\mathcal{E}_h = \{|g(s) - g(t)|,\ (t, s) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } |t - s| \leqslant h\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure et $\omega_g(h)$ est bien défini.

(b) Soit $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$, alors $g' \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ donc comme ci-dessus g' est bornée sur $\mathbb{R}$, et $k = \|g'\|_\infty$ est un réel bien défini.
Par inégalité des accroissements finis, g est k-lipschitzienne et donc étant donné $h > 0$, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $|t - s| \leqslant h$ on a $|g(t) - g(s)| \leqslant k|t - s| \leqslant k\,h$ et ainsi $\omega_g(h) \leqslant k\,h = h\,\|g'\|_\infty$.
On a par ailleurs $\omega_g(h) \geqslant 0$ pour tout $h > 0$ donc par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim\limits_{h\to 0} \omega_g(h) = 0$ *est vrai pour tout* $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q 3. Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.

(a) On suppose $h \leqslant h'$, alors avec la notation ci-dessus on aura $\mathcal{E}_h \subset \mathcal{E}_{h'}$ donc par propriété de la borne supérieure, $\omega_g(h) \leqslant \omega_g(h')$.

(b) Soient s, t tels que $|s - t| \leqslant h + h'$, notons $u = \dfrac{h'}{h+h'}s + \dfrac{h}{h+h'}t$, de sorte que

$$|s - u| = \left|s - \frac{h'}{h+h'}s - \frac{h}{h+h'}t\right| = \left|\frac{h}{h+h'}(s-t)\right| \leqslant \frac{h}{h+h'}(h+h') = h$$

et ainsi $|g(s) - g(u)| \leqslant \omega_g(h)$; on a de même $|u - t| \leqslant h'$ donc $|g(u) - g(t)| \leqslant \omega_g(h')$. On obtient alors par inégalité triangulaire

$$|g(s) - g(t)| \leqslant |g(s) - g(u)| + |g(u) - g(t)| \leqslant \omega_g(h) + \omega_g(h')$$

pour tout (s, t) tel que $|s - t| \leqslant h + h'$, et donc en passant à la borne supérieure, $\omega_g(h + h') \leqslant \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

(c) On en déduit alors par récurrence que $\omega_g(nh) \leqslant n\,\omega_g(h)$ pour tout $n \geqslant 1$: c'est une égalité pour $n = 1$, et si l'inégalité est vraie pour un certain n alors

$$\omega_g((n+1)h) = \omega_g(nh + h) \leqslant \omega_g(nh) + \omega_g(h) \leqslant n\,\omega_g(h) + \omega_g(h) \leqslant (n+1)\,\omega_g(h).$$

Soit $\lambda > 0$ et $n = \lfloor \lambda \rfloor + 1$ qui vérifie $\lambda \leqslant n \leqslant (1+\lambda)$, on a alors $\omega_g(\lambda h) \leqslant \omega_g(nh)$ d'après (a) et donc d'après (b), $\omega_g(\lambda h) \leqslant n\omega_g(h) \leqslant (1+\lambda)\omega_g(h)$.

Q 4. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, et $x \in \mathbb{R}$ fixé. Alors par relation de Chasles

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

et par le changement de variable $u = t - 2\pi$ et la 2π-périodicité de g,

$$\int_{\pi}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{-\pi+x} g(u+2\pi)\,\mathrm{d}u = -\int_{-\pi+x}^{-\pi} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

d'où la relation

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 5. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $p \in \mathcal{T}_n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto p(x-t)g(t)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, ce qui garantit que $\Delta(p)(x)$ est bien défini. Écrivons p sous la forme $p : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(x-t)} \right) g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} c_k \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t)\,\mathrm{d}t \right) e^{ikx}$$

et ainsi $\Delta(p)$ définit un élément de $\mathcal{T}_n$, de coefficients $\widehat{c}_k = c_k \left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t)\,\mathrm{d}t \right)$ pour tout k. Ainsi Δ définit une application de $\mathcal{T}_n$ vers $\mathcal{T}_n$.
Enfin, on a bien la linéarité de Δ car pour $p, q \in \mathcal{T}_n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ on aura par linéarité de l'intégrale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(\lambda p + \mu q)(x) = \lambda \Delta(p)(x) + \mu \Delta(q)(x).$$

Ainsi Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

Partie B –

I – La fonction J_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q 6. Soit $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{it} \neq 1$ donc par somme géométrique,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\,(-2i)\,\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{e^{i\frac{1}{2}t}\,(-2i)\,\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

et en élevant à la puissance 4,

$$f_n(t) = \varphi_n(t)^4 = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4.$$

Q 7. **Erreur dans l'énoncé ! !** Il est faux de dire que $\varphi_n \in \mathcal{T}_n$ dans le cas où n est impair. On peut le justifier en remarquant que tout élément de $\mathcal{T}_n$ est 2π-périodique, alors que φ_n ne l'est pas si n est impair. Montrons donc directement que $\varphi_n^2 \in \mathcal{T}_n$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$(\varphi_n(t))^2 = e^{-nit}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right)^2 = e^{-nit}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} e^{ikt}e^{i\ell t}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} e^{i(k+\ell-n)t}.$$

Or pour tout $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$ on a $k+\ell-n \in [\![-n,n]\!]$ donc φ_n^2 est une combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto e^{ikt}$ avec $k \in [\![-n,n]\!]$, et appartient bien à $\mathcal{T}_n$.

Notons les coefficients $(c_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ tels que pour tout t on ait $\varphi_n^2(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(\varphi_n(t))^4 = \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\right)^2 = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} c_k c_\ell e^{i(k+\ell)t}$$

et pour tout $(k,\ell) \in [\![-n,n]\!]^2$ on a $k+\ell \in [\![-2n,2n]\!]$ donc φ_n^4 appartient bien à $\mathcal{T}_{2n}$.

Q 8. La fonction f_n est continue et positive sur $[-\pi,\pi]$, et n'est pas identiquement nulle, donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t > 0$. Posons $c_n = \left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1} > 0$, on aura bien $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose désormais $J_n = c_n f_n$, de sorte que J_n est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

II – Une majoration de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q 9. Au vu de l'expression de c_n ci-dessus, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| f_n(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Or par parité des fonctions $t \mapsto f_n(t)$ et $t \mapsto |t| f_n(t)$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi} t f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où la formule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_{0}^{\pi} t f_n(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{0}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t}$.

Q 10. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sin est de classe C^2, de dérivée seconde $-\sin$ qui est toujours négative, donc la fonction est concave. En conséquence, son graphe est situé en dessous de sa tangente à l'origine, d'équation $y = x$, et au dessus de la sécante reliant les points de coordonnées $(0, \sin(0))$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right)$, qui a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. On obtient ainsi l'encadrement

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t \leqslant t.$$

Q 11. On en déduit que pour tout $t \in]0, \pi]$, puisque $\frac{t}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\frac{t}{\pi}}$$

et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^\pi t f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi t\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 \mathrm{d}t \leqslant \pi^4 \int_0^\pi \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^4}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant le changement de variable $u = \frac{n+1}{2}\, t$ on obtient

$$\pi^4 \int_0^\pi \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^4}{t^3}\,\mathrm{d}t = \pi^4 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{\left(\frac{2u}{(n+1)}\right)^3}\frac{2\,\mathrm{d}u}{n+1} = \pi^4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$

d'où l'inégalité souhaitée.

Q 12. En utilisant maintenant l'inégalité $\sin\frac{t}{2} \leqslant \frac{t}{2}$ pour tout $t \in]0, \pi]$ et le même changement de variable, on a

$$\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{\left(\frac{u}{(n+1)}\right)^4}\frac{2\,\mathrm{d}u}{n+1} = 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u.$$

Q 13. La fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^3}$ est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ (prolongeable par continuité en 0 et majorée par $\frac{1}{u^3}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$), et par positivité on a $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il en va de même pour la fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^4}$, et on a $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_0^\pi t f_n(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\pi^4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \displaystyle\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u}{2(n+1)^3 \displaystyle\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u} \leqslant \frac{\pi^4}{8(n+1)} \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u}.$$

On a donc bien une constante a indépendante de n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{n+1}.$$

III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $T_n g$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que $(T_n g)$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q 14. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, on effectue le changement de variable $u = x - t$:

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x+\pi}^{x-\pi} J_n(u) g(x-u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} J_n(u) g(x-u)\,\mathrm{d}u.$$

Les fonctions J_n et g étant 2π-périodiques, la fonction $u \mapsto J_n(u) g(x-u)$ l'est également et d'après **Q 4.**

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs puisque $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ on a immédiatement, en multipliant par la constante $g(x)$, $g(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x)\,\mathrm{d}t$.
On en déduit par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire que

$$|T_n g(x) - g(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)(g(x-t) - g(x))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)|\,\mathrm{d}t.$$

Q 15. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, puisque $|(x-t) - x| = |t|$, $|g(x-t) - g(x)| \leqslant \omega_g(|t|) \leqslant |t|\,\|g'\|_\infty$ d'après **Q 2.**
On en déduit en utilisant l'inégalité obtenue en **Q 13.** que

$$|T_n g(x) - g(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |t|\,\|g'\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a\|g'\|_\infty}{n+1}$$

et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient bien que

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant \frac{a\|g'\|_\infty}{n+1}.$$

(b) On en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n g - g\|_\infty = 0$, autrement dit la suite $(T_n g)$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$. De plus puisque $J_n \in \mathcal{T}_{2n}$ pour tout n, on sait d'après **Q 5.** que $T_n g \in \mathcal{T}_{2n}$ pour tout n, on a donc construit une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q 16. On suppose seulement que g est continue.

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux réels t et x, comme précédemment $|g(x-t) - g(x)| \leqslant \omega_g(|t|)$.
En appliquant **Q 3.**c avec $\lambda = n|t|$ et $h = \dfrac{1}{n}$ on obtient alors

$$|g(x-t) - g(x)| \leqslant \omega_g\left(n|t|.\frac{1}{n}\right) \leqslant (1 + n|t|)\,\omega_g(1/n).$$

(b) On en déduit alors que, pour n et x fixés,

$$|T_n g(x) - g(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)(1 + n|t|)\,\omega_g(1/n)\,\mathrm{d}t = \left(1 + n\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\omega_g(1/n)$$

et en utilisant à nouveau l'inégalité **Q 13.** on en déduit que

$$|T_n g(x) - g(x)| \leqslant \left(1 + \frac{a\,n}{n+1}\right)\omega_g(1/n) \leqslant (1+a)\omega_g(1/n).$$

Ceci étant vrai pour tout x, on a en posant $b = 1 + a > 0$ le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant b\,\omega_g(1/n).$$

(c) On a admis que $\lim\limits_{h\to 0} \omega_g(h) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_g(1/n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n g - g\|_\infty = 0$. Comme précédemment, la suite (T_n) converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Partie C –

I – On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note T le polynôme $X^n + 1$.

Q 17. Le polynôme $T' = nX^{n-1}$ ne s'annule qu'en 0 qui n'est pas racine de T donc toutes ses racines sont simples. Puisqu'il est scindé dans $\mathbb{C}$ et de degré n, il admet n racines simples dans $\mathbb{C}$.
Explicitement, la résolution de l'équation $T(z) = 0 \iff z^n = -1 = e^{-i\pi}$ donne les racines $z_k = e^{i\frac{(2k-1)\pi}{n}}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Q 18. Puisque T est unitaire, il s'écrit sous forme factorisée $T = \prod\limits_{j=1}^{n}(X - z_j)$. Fixons $k \in [\![1, n]\!]$ et notons $Q_k = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(X - z_j)$, de sorte que $T = (X - z_k)Q_k$, on a alors

$$T' = (X - z_k)Q_k' + Q_k \quad \text{donc} \quad T'(z_k) = Q_k(z_k) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j).$$

Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. On considère la fraction rationnelle F donnée par $F = \dfrac{X^\ell}{X^n + 1}$.
On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F, il y a existence et unicité de $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ et de E dans $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

Q 19. Multiplions la décomposition donnée dans l'énoncé par le polynôme T, on obtient alors, en réutilisant les polynômes Q_k introduits ci-dessus,

$$X^\ell = TF = \sum_{j=1}^{n} \mu_j Q_j + TE.$$

En fixant $k \in [\![1, n]\!]$ et en évaluant cette expression en z_k, on obtient compte tenu de $T(z_k) = 0$ et $Q_j(z_k) = 0$ pour $j \neq k$,

$$z_k^\ell = \mu_k Q_k(z_k) = \mu_k T'(z_k) = \mu_k\, n z_k^{n-1} = \mu_k\, n \,\frac{-1}{z_k} \text{ car } z_k^n = -1,$$

et ainsi $\mu_k = -\dfrac{z_k^{\ell+1}}{n}$.

Par ailleurs si $\ell \leqslant n-1$ alors le polynôme $TE = X^\ell - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j Q_j$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Or $\deg(T) = n$ donc on a nécessairement que E est le polynôme nul. Dans le cas où $\ell = n$, on a $F = \dfrac{X^n}{X^n+1} = 1 - \dfrac{X^0}{X^n+1}$ donc puisque le polynôme E associé au cas $\ell = 0$ est le polynôme nul, celui associé au cas $\ell = n$ est constant égal à 1.

Q 20. Par dérivation on a

$$F' = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\mu_k}{(X - z_k)^2} + E' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(X - z_k)^2}$$

et au vu de l'expression de départ on a

$$F' = \frac{\ell X^{\ell-1}(X^n+1) - X^\ell(nX^{n-1})}{(X^n+1)^2}$$

donc en évaluant en 1 on obtient

$$F'(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(1 - z_k)^2} = \frac{2\ell - n}{4} = \frac{1}{2}\left(\ell - \frac{n}{2}\right)$$

d'où l'on déduit bien que

$$\ell = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}.$$

Q 21. (a) Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$ et $P_\ell = X^\ell$, alors l'égalité ci-dessus multipliée par X^ℓ donne

$$\ell X^\ell = \frac{n}{2} X^\ell + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1} X^\ell}{(z_k - 1)^2} = \frac{n}{2} X^\ell + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k\,(z_k X)^\ell}{(z_k - 1)^2}$$

et par ailleurs $\ell X^\ell = X\, P_\ell'(X)$ donc cette égalité se réécrit

$$X P_\ell'(X) = \frac{n}{2} P_\ell(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P_\ell(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ écrit sous la forme $P = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} p_\ell P_\ell$, divers arguments de linéarité permettent d'obtenir que

$$XP'(X) = \sum_{\ell=0}^{n} p_\ell X P_\ell'(X) = \sum_{\ell=0}^{n} p_\ell \left(\frac{n}{2} P_\ell(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P_\ell(z_k X)}{(z_k - 1)^2} \right) = \frac{n}{2} P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

(b) L'expression obtenue **Q 20.** dans le cas $\ell = 0$ donne immédiatement

$$\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}.$$

II –

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$. On notera $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

Q 22. Montrons que l'application $P \mapsto \|P\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

▷ Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ avec (p_k) nulle à partir d'un certain rang, on a pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|P(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k|$ donc $|P|$ est borné sur $\mathbb{U}$ et $\|P\|$ est un réel positif bien défini.

▷ Séparation : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|P\| = 0$, alors $P(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{U}$ donc P a une infinité de racines et est de ce fait le polynôme nul.

▷ Homogénéité : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors pour tout $z \in \mathbb{U}$ on a $|(\lambda)P(z)| = |\lambda|\,|P(z)|$ donc $\|\lambda P\| = |\lambda|\,\|P\|$.

▷ Inégalité triangulaire : soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, alors pour tout $z \in \mathbb{U}$ on a

$$|P(z) + Q(z)| \leqslant |P(z)| + |Q(z)| \leqslant \|P\| + \|Q\|$$

donc $\|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$.

Q 23. Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$, il s'écrit sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \,]-\pi, \pi[$. On a alors

$$(z-1)^2 = (e^{i\theta} - 1)^2 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right)^2 = e^{i\theta}\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = -4z\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

et ainsi $\dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{-1}{4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$ est un réel négatif.

Q 24. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, et soit $z \in \mathbb{U}$. alors d'après **Q 21.**a,

$$|P'(z)| = |z\,P'(z)| \leqslant \frac{n}{2}|P(z)| + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k P(z_k z)}{(z_k-1)^2}\right| \leqslant \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(z_k-1)^2}\right|\right)\|P\|$$

où on a utilisé que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k z \in \mathbb{U}$ donc $|P(z_k z)| \leqslant \|P\|$.

Or d'après **Q 23.** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ le nombre $\dfrac{z_k}{(z_k-1)^2}$ est un réel négatif donc en utilisant **Q 21.**b :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(z_k-1)^2}\right| = \sum_{k=1}^{n}\frac{-z_k}{(z_k-1)^2} = \frac{n^2}{4}.$$

On obtient ainsi que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|P'(z)| \leqslant \left(\dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\dfrac{n^2}{4}\right)\|P\| = n\|P\|$ et finalement $\|P'\| \leqslant n\|P\|$.

Q 25. Soit $q \in \mathcal{T}_n$, et les coefficients $(c_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k+n)x} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} e^{ikx}.$$

On introduit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} X^k \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) = e^{-inx}P(e^{ix}) \quad \text{et donc} \quad q'(x) = -ine^{-inx}P(e^{ix}) + ie^{-inx}P'(e^{ix}).$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|q'(x)| \leqslant \left|-ine^{-inx}P(e^{ix}) + ie^{-inx}P'(e^{ix})\right| \leqslant n\left|P(e^{ix})\right| + \left|P'(e^{ix})\right|,$$

or $e^{ix} \in \mathbb{U}$ donc $|P(e^{ix})| \leqslant \|P\|$ et $|P'(e^{ix})| \leqslant \|P'\| \leqslant (2n)\|P\|$.
On remarque enfin que $\{e^{ix},\, x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{U}$ donc

$$\|q\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |q(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |P(e^{ix})| = \sup_{z\in\mathbb{U}} |P(z)| = \|P\|$$

donc finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|q'(x)| \leqslant 3n\|P\| = 3n\|q\|_\infty$ et ainsi $\|q'\|_\infty \leqslant 3n\|q\|_\infty$.

Partie D – Fonctions höldériennes

Soit g une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $\alpha \in]0,1]$.
On dit que g est α-höldérienne s'il existe $K > 0$ tel que, pour tous réels x et y de l'intervalle I, $|g(x) - g(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$.

I – Exemples

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

Q 26. Soit y un réel positif. Par croissance de la fonction $t \mapsto t^\alpha$, on a bien $0 \leqslant x^\alpha - y^\alpha$ pour tout $x \geqslant y$.
Par ailleurs si $y = 0$ on a $x^\alpha - y^\alpha = (x-y)^\alpha$ pour tout $x \geqslant 0$.
Supposons $y > 0$ et considérons la fonction $\psi : x \mapsto (x-y)^\alpha - x^\alpha + y^\alpha$. Elle est continue sur $[y, +\infty[$ et dérivable sur $]y, +\infty[$ et pour tout $x > y$, $\psi'(x) = \alpha\left[(x-y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\right]$ qui est positif par décroissance de $t \mapsto t^{\alpha-1}$, puisque $\alpha - 1 < 0$. On en déduit que ψ est croissante sur $[y, +\infty[$ et $\psi(y) = 0$, donc $\psi(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant y$.
On a bien prouvé que que pour tout $x \geqslant y$ on a : $0 \leqslant x^\alpha - y^\alpha \leqslant (x-y)^\alpha$.

Q 27. On obtient ainsi que pour tous $x, y \geqslant 0$ tels que $x \geqslant y$ on a $0 \leqslant h(x) - h(y) \leqslant (x-y)^\alpha$ et, si $x \leqslant y$, en intervertissant leur rôle, $0 \leqslant h(y) - h(x) \leqslant (y-x)^\alpha$.
Autrement dit on a bien $|h(x) - h(y)| \leqslant |x-y|^\alpha$ pour tout x, y positifs donc h est α-höldérienne sur $[0, +\infty[$, avec la constante K prise égale à 1.

Q 28. Soit $\beta \in]0,1]$ tel que $\beta \neq \alpha$. On remarque que pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{|h(x) - h(0)|}{|x-0|^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.
Supposons d'abord $\beta > \alpha$, alors $\dfrac{|h(x) - h(0)|}{|x-0|^\beta} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ donc cette fonction n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$ et il ne peut exister de constante K telle que pour tout x on ait $|h(x) - h(0)| \leqslant K|x-0|^\beta$. Ainsi h n'est pas β-hölderienne sur $\mathbb{R}_+$.
Dans le cas où $\beta < \alpha$, on a $\dfrac{|h(x) - h(0)|}{|x-0|^\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et pour la même raison, h n'est pas β-hölderienne sur $\mathbb{R}_+$.

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$k : x \longmapsto \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q 29. **Erreur dans l'énoncé !!** Les expressions $x\ln(x)$ et $(y-1)\ln(1-y)$ ne sont pas proprement définies en $x = 0$ et $y = 1$, c'est même pour ça qu'on a introduit la fonction k.
On montrera donc le résultat sous la forme

$$k(x+y) - k(x) \leqslant -k(1-y).$$

Soit $y \in]0,1]$. Considérons la fonction définie sur $[0,1-y]$ par $\chi : x \mapsto k(x+y)-k(x)$. Remarquons que k est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc χ est continue sur $[0,1-y]$ et dérivable sur $]0,1-y]$ et

$$\forall x \in]0,1-y], \quad \chi'(x) = \ln(x+y)+1-\ln(x)-1 = \ln(x+y)-\ln(x) \geqslant 0 \quad \text{car } y \geqslant 0.$$

Ainsi χ est croissante sur $[0,1-y]$ donc

$$\forall x \in [0,1-y], \quad \chi(x) \leqslant \chi(1-y) = \ln(1) - k(1-y).$$

On a ainsi bien obtenu que

$$\forall x \in [0,1-y], \quad k(x+y)-k(x) \leqslant -k(1-y).$$

Q 30. Soient $x, y \in [0,1]$. Quitte à intervertir leur rôle on peut supposer que $x \leqslant y$. On va même dans un premier temps supposer $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, et poser $t = y-x$. L'inégalité précédente avec x et t (qui vérifient bien $0 \leqslant x \leqslant 1-t$ puisque $y = x+t \leqslant 1$) donne $k(y)-k(x) \leqslant -k(1-t)$. Puisque la fonction k n'est pas croissante, on a en fait tout intérêt à compléter cette inégalité par la minoration par $\chi(0) = k(t)$ et on obtient que

$$k(t) \leqslant k(y)-k(x) \leqslant -k(1-t) \quad \text{d'où} \quad |k(y)-k(x)| \leqslant \max\big(k(t)\,,\, -k(1-t)\big).$$

Considérons les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{-k(t)}{t^\alpha}$ et $v : t \mapsto \dfrac{-k(1-t)}{t^\alpha}$.
La fonction u est continue sur $]0,1]$ et $u(t) = -t^{1-\alpha}\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées donc u est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, donc bornée.
De même, v est continue sur $]0,1]$ et on a $v(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{1-\alpha}$ donc $v(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc v est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, donc bornée.
Il existe donc une constante K telle que pour tout $t \in]0,1]$, $\dfrac{\max(u(t), v(t))}{t^\alpha} \leqslant K$ et ainsi $|k(x)-k(y)| \leqslant K(x-y)^\alpha$. L'inégalité est vraie dans le cas où $x = y$.

II – Espace $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans la suite du problème, pour $\alpha \in]0,1[$, on note $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ l'ensemble des fonctions α-höldériennes 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, on pose $\delta_n(f) = \inf\limits_{p \in \mathcal{T}_n} \|f-p\|_\infty$.

Q 31. Soit $f \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et K une constante associée, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(x_0)| \leqslant K|x-x_0|^\alpha$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique. Finalement $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$, non vide car il contient la fonction nulle.
Soient $f, g \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et K_f, K_g des constantes associées, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\big|(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(y)\big| \leqslant |\lambda|\,|f(x)-f(y)|+|\mu|\,|g(x)-g(y)| \leqslant (|\lambda|K_f+|\mu|K_g)\,|x-y|^\alpha$$

donc $\lambda f+\mu g$ est α-höldérienne, et elle est 2π-périodique donc appartient à $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$.
Ainsi $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Q 32. Soit $g \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$. Remarquons que la condition α-höldérienne se traduit par le fait que pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant K\,h^\alpha$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu dans la partie B–III que $T_n g \in \mathcal{T}_{2n}$, donc en utilisant **Q 16.**b,

$$\delta_{2n}(g) \leqslant \|T_n g - g\|_\infty \leqslant b\omega_g(1/n) \leqslant \frac{b\,K}{n^\alpha} = \frac{b\,K\,2^\alpha}{(2n)^\alpha}.$$

Pour le cas impair, on peut écrire, puisque $\mathcal{T}_{2n+1} \supset \mathcal{T}_{2n}$:

$$\delta_{2n+1}(g) \leqslant \delta_{2n}(g) \leqslant \frac{b\,K\,2^\alpha}{(2n)^\alpha} \leqslant \frac{b\,K\,2^\alpha}{(2n+1)^\alpha}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^\alpha \leqslant \frac{b\,K\,3^\alpha}{(2n+1)^\alpha}$$

On a donc trouvé une constante D telle que $\delta_n(g) \leqslant \dfrac{D}{n^\alpha}$ pour tout $n \geqslant 2$, et ainsi $\delta_n(g) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

III – Étude d'une réciproque

On fixe un réel $\alpha \in]0,1[$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ telle que $\delta_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Il existe ainsi un réel $C>0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n(f) \leqslant \dfrac{C}{n^\alpha}$.

Q 33. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction nulle appartient à $\mathcal{T}_n$ donc $\delta_n \leqslant \|f\|_\infty$.
Notons $A = \{p \in \mathcal{T}_n \,/\, \|f-p\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\}$ qui est non vide puisqu'il contient 0.
Montrons que A est un ensemble fermé : soit $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{T}_n & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \|f-p\|_\infty \end{array}$ alors cette application est continue et $A = \Phi^{-1}([0,\|f\|_\infty])$ est donc un ensemble fermé. C'est également un ensemble borné car si $p \in A$ alors par inégalité triangulaire

$$\|p\|_\infty \leqslant \|p-f\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

Puisque A est fermé et borné dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{T}_n$, et que Φ est continue, d'après le théorème des bornes atteintes elle admet un minimum : il existe $q_n \in A$ tel que $\|f-q_n\| = \min\limits_{p\in A} \|f-p\|_\infty$, et si $p \notin A$ alors $\|f-p\|_\infty > \|f\|_\infty \geqslant \delta_n(f)$ donc ce minimum est bien égal à $\delta_n(f)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère un polynôme $p_n \in \mathcal{T}_{2^n}$ tel que $\|f-p_n\|_\infty = \delta_{2^n}(f)$.

Q 34. La fonction $q = p_{n+1} - p_n$ appartient à $\mathcal{T}_{2^{n+1}}$ donc d'après **Q 25.** on a

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leqslant 3.2^{n+1}\,\|p_{n+1}-p_n\|_\infty,$$

or $\|p_{n+1}-p_n\|_\infty \leqslant \|p_{n+1}-f\|_\infty + \|f-p_n\|_\infty = \delta_{2^{n+1}}(f) + \delta_{2^n}(f)$ donc

$$\|p'_{n+1}-p'_n\|_\infty \leqslant 3\,2^{n+1}\left(\delta_{2^{n+1}}(f)+\delta_{2^n}(f)\right) \leqslant 3\,2^{n+1}\left(\frac{C}{2^{\alpha(n+1)}}+\frac{C}{2^{\alpha n}}\right) = \frac{6C(1+2^\alpha)}{2^\alpha}2^{n(1-\alpha)}$$

d'où la majoration souhaitée avec $C' = \dfrac{6C(1+2^\alpha)}{2^\alpha}$.

Q 35. Fixons $n \in \mathbb{N}$, alors $p_n = p_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(p_{k+1}-p_k)$ donc par inégalité triangulaire

$$\|p'_n\|_\infty \leqslant \|p'_0\|_\infty + \sum_{k=0}^{n-1}\|p'_{k+1}-p'_k\|_\infty \leqslant \|p'_0\|_\infty + C'\sum_{k=0}^{n-1}2^{k(1-\alpha)}$$

On reconnait une somme géométrique de raison $2^{1-\alpha}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^{k(1-\alpha)} = \frac{2^{n(1-\alpha)}-1}{2^{1-\alpha}-1} \leqslant \frac{2^{n(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha}-1} \quad \text{donc finalement} \quad \|p'_n\|_\infty \leqslant \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha}-1}\,2^{n(1-\alpha)}.$$

Q 36. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^{(1-\alpha)n} \geqslant 1$ donc $\|p_n'\|_\infty \leqslant \left(\|p_0'\|_\infty + \dfrac{C'}{2^{1-\alpha}-1}\right) 2^{n(1-\alpha)}$, on a donc bien un réel $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|p_n'\|_\infty \leqslant A\,2^{(1-\alpha)n}.$$

Q 37. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire on a

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-p_n(x)| + |p_n(x)-p_n(y)| + |p_n(y)-f(y)| \leqslant 2\|f-p_n\|_\infty + |p_n(x)-p_n(y)|.$$

Or p_n est de classe C^1 donc $|p_n(x) - p_n(y)| \leqslant \omega_{p_n}(|x-y|) \leqslant \|p_n'\|_\infty\,|x-y|$. On obtient finalement

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 2\delta_{2^n}(f) + \|p_n'\|_\infty\,|x-y| \leqslant 2\,\frac{C}{(2^n)^\alpha} + A\,2^{(1-\alpha)n}\,|x-y|$$

et ainsi on a bien obtenu la majoration $|f(x) - f(y)| \leqslant C\,2^{1-n\alpha} + A\,2^{(1-\alpha)n}\,|x-y|$.

Q 38. On souhaite montrer que f est α-höldérienne. On cherche donc une constante K telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$. Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
▷ Si $x = y$ l'inégalité est vraie quel que soit K.
▷ f est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc bornée sur ce segment, et donc bornée sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Soit M un majorant de $|f|$, alors si $|x-y| \geqslant 1$ on a $|f(x)-f(y)| \leqslant 2M \leqslant 2M|x-y|^\alpha$.
▷ Supposons maintenant que $0 < |x-y| \leqslant 1$.
Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant |x-y| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, d'après ce qui précède on a

$$|f(x)-f(y)| \leqslant C\,2^{1-n\alpha} + A\,2^{(1-\alpha)n}\,\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{2C+A}{2^{n\alpha}} \leqslant \frac{2^\alpha(2C+A)}{2^{(n+1)\alpha}} \leqslant 2^\alpha(2C+A)\,|x-y|^\alpha.$$

Finalement en posant $K = \max(2M, 2^\alpha(2C+A))$ on aura bien $|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$ pour tout (x, y), et ainsi f est α-höldérienne.

— *Fin* —