ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

M

Concours d'admission 1979

MATHEMATIQUES I - M (2 pages dactylographiées)

A toute suite complexe (a_n), $n \in \mathbb{N}$, on associe les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par les relations :

$$b_n = a_{n-1} - a_n, \qquad c_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \qquad d_n = a_{n-1} + a_{n+1} - 2\,a_n .$$

On dit que (a_n) est à variation bornée si la série de terme général b_n est absolument convergente. On dit que (a_n) est quasi-convexe si la série de terme général $n\,d_n$ est absolument convergente. On dit que (a_n) est convexe si elle est à valeurs réelles et si le réel d_n est positif ou nul pour tout $n \geqslant 1$.

Première partie

Dans les deux prmières parties, (a_n) est une suite réelle.

I-1°) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite (b_n), pour que la suite (a_n) soit convexe.

I-2°) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction réelle f continue sur $\mathbb{R}_+$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à dérivée seconde positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $a_n = f(n)$ pour tout n. Démontrer que (a_n) est convexe .

I-3°) Déterminer toutes les suites convexes (a_n) telles que les suites définies par les relations $a'_n = -a_n$ soient également convexes.

I-4°)Déterminer les valeurs du réel strictement positif α telles que la suite (n^α) soit convexe.

I-5°) Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$. On adopte, dans cette question, $a_n = [n^\alpha]$ où α est un réel strictement positif.

a) La suite (a_n) est-elle convexe pour $\alpha = \frac{3}{2}$? (On pourra examiner le cas $n = 9$ en s'aidant d'une calculatrice ; toutefois le raisonnement figurant sur la copie devra exclure toute valeur approchée et ne s'appuyer que sur des inégalités entre entiers) .

b) Démontrer que la suite (a_n) est convexe pour $\alpha \geqslant 2$.

Deuxième partie

Dans cette partie, (a_n) est une suite convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $|a_n|$.

II-1°) Démontrer que la suite (b_n) est convergente. Déterminer sa limite.

II-2°) Démontrer que la suite (a_n) est convergente.

II-3°) Soient n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant 2p$; démontrer les relations :

$$0 \leqslant n\,b_n \leqslant 2(a_p - a_n).$$

En déduire les limites des suites $(n\,b_n)$ et $(n\,b_{n+1})$.

II-4°) Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n .$$

Troisième partie

Dans cette partie, (a_n) est une suite quasi-convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $|a_n|$.

III-1°) Démontrer, pour tout entier $N \geqslant 1$, la relation :

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leqslant |a_0 - a_N| + 2 \sum_{n=1}^{N} n\,|d_n| .$$

En déduire que (a_n) est à variation bornée.

III-2°) Démontrer (en justifiant l'existence des sommes des séries concernées) les relations suivantes :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right| + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\,|d_n|$$

III-3°) Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

.../...

Quatrième partie

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.
IV-1°) Démontrer, pour n et N entiers supérieurs ou égaux à 1, les relations :

$$c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1})$$

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n - c_{n+1}| \leqslant \sum_{m=1}^{N} |a_m - a_{m+1}|$$

IV-2°) On suppose, dans cette question, que (a_n) est à variation bornée. Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, le nombre $c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n$ en fonction de $c_{n-1} - c_n$ et $a_{n+1} - a_n$. En déduire la relation :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|c_{n-1} + c_{n+1} - 2c_n| \leqslant 3\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n| .$$

IV-3°) On suppose, dans cette question, que (a_n) est bornée et que (c_{n+1}) est quasi-convexe. Démontrer, en utilisant le résultat de la question III-1°), que (a_n) est à variation bornée et convergente.
IV-4°) On pose, dans cette question, $a_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ si l'entier n n'est pas une puissance de 2 et $b_n = \frac{1}{n}$ si l'entier n est une puissance de 2.
Démontrer que ceci définit une suite (a_n) vérifiant les propriétés supposées en IV-2°) et 3°).
Peut-on écrire encore, dans ce cas, la relation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \quad ?$$

IV-5°) On suppose, dans cette question, que (a_n) est à variation bornée. Démontrer que les propositions (la série de terme général $(\frac{a_{n+1}}{n+1})$ est absolument convergente) et (la série de terme général $(\frac{c_n}{n+1})$ est absolument convergente) sont équivalentes.

Cinquième partie

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe. Log représente le logarithme népérien.
V-1°) Démontrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 1, les relations :

$$\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leqslant 1 + \operatorname{Log} p$$

$$\Big|\, |a_p \operatorname{Log} p - a_{p+1}\operatorname{Log}(p+1)| - |a_p - a_{p+1}|\operatorname{Log} p \,\Big| \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p} .$$

V-2°) Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :
(La suite (a_n) converge vers 0 et la série de terme général $((a_{n+1} - a_{n+2})\operatorname{Log}(n+1))$ est absolument convergente)
(Les séries de termes généraux $(\frac{a_{n+1}}{n+1})$ et $(a_{n+1}\operatorname{Log}(n+1) - a_{n+2}\operatorname{Log}(n+2))$ sont absolument convergentes).
V-3°) Donner un exemple simple de suite (a_n) satisfaisant aux deux conditions ci-dessus.

ooooooooooooooooooooooooo
ooooooooooooooooooo
ooooooooooooo
ooooooo
o