ENAC Pilotes 2019

—

Épreuve de mathématiques

—

un corrigé

Questions 1 à 6

Exercice sur les racines (rationnelles ou réelles) des polynômes à coefficients entiers. La question 2 est mal posée, la question 4 redondante avec la question 3 et trop calculatoire.

Q1. Réponse C).

A) faux : le polynôme $P(X) = X - 1$ admet une racine dans $\mathbb{Q}$.

B) faux : le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$.

C) vrai et D) faux : si $P(\frac{p}{q}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (\frac{p}{q})^k = 0$, alors en multipliant par q^n, on obtient

$$\underbrace{a_0 q^n}_{\text{multiple de } q} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} a_k p^k q^{n-k}}_{\text{multiple de } p \text{ et } q} + \underbrace{a_n p^n}_{\text{multiple de } p} = 0$$

qui montre que p divise $a_0 q^n$ et que q divise $a_n p^n$.

Comme $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$, cela implique que p divise a_0 et q divise a_n.

Q2. Réponse D) ? A) et D) ? *sans conviction*

A) *Je ne comprends pas bien la phrase ...*
Vu Q1 C), les racines rationnelles du polynôme P sont parmi les rationnels $\frac{p_i}{q_j}$.

B) comme en A), en ne parlant ici que des racines rationnelles positives.

C) faux : voir Q1 C).

D) vrai, à condition de parler du nombre de racines réelles de P.

Q3. Réponse D).
Vu Q1 C), si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, avec $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$, sont tels que $\frac{p}{q}$ est racine de Q, alors p divise $a_0 = 4$ et q divise $a_3 = 6$, donc $\pm p \in \{1, 2, 4\}$ et $\pm q \in \{1, 2, 3, 6\}$, donc $\pm\frac{p}{q} \in \{1, 2, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6}\}$.
Donc en tenant compte du signe, il y a 16 rationnels pouvant être racines de Q (A et C sont faux), et 10 rationnels non entiers pouvant être racines de Q (B est faux et D est vrai).

Q4. Réponse C).
On reprend Q3, avec ici p et q positifs divisant respectivement 14 et 78, donc $p \in \{1, 2, 7, 14\}$ et $q \in \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$, et donc $\frac{p}{q}$ est égal à l'un des rationnels suivants :

$$1, 2, 7, 14, \tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{3}, \tfrac{14}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{6}, \tfrac{1}{13}, \tfrac{2}{13}, \tfrac{7}{13}, \tfrac{14}{13}, \tfrac{1}{26}, \tfrac{7}{26}, \tfrac{1}{39}, \tfrac{2}{39}, \tfrac{7}{39}, \tfrac{14}{39}, \tfrac{1}{78}, \tfrac{7}{78},$$

ce qui fait 24 possibilités dont 20 non entières.

Q5. Réponse B).
On reprend Q3, avec ici p et q divisant respectivement 1 et 1, donc $p = \pm 1$ et $q = \pm 1$, et donc $\frac{p}{q} = \pm 1$. Or $S(1) = -1$ et $S(-1) = 3$, donc S n'a pas de racine rationnelle.

Q6. Réponse B).
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = 3x^2 - 3$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$S(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre donc que S admet trois racines réelles distinctes : une dans $]-\infty; -1[$, une dans $]-1; 1[$, et une dans $]1; +\infty[$.

Questions 7 à 17

Exercice sur l'étude (classique, mais très calculatoire) des suites récurrentes homographiques. La question 8 est problématique.

Q7. Réponse B).
Avec $c = 0$, la relation de récurrence devient $u_{n+1} = \frac{a}{d}u_n + \frac{b}{d}$, ce qui définit une suite arithmético-géométrique.

Q8. Réponse D) ? C) et D) ?
Si $ad - bc = 0$, alors les vecteurs (a, b) et (c, d) de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) = (\lambda c, \lambda d)$ et la relation de récurrence se simplifie alors en $u_{n+1} = \lambda = \frac{a}{c}$.
Cela ne fait pas de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante, puisque u_0 n'est pas forcément égal à λ, et elle peut en toute rigueur ne pas être bien définie si $cu_0 + d = 0$.
En imaginant que les concepteurs du sujet ont pensé à la première subtilité mais pas à la seconde, on répondra que D est vraie et les autres sont fausses.

Q9. Réponse E).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -\frac{d}{c}$. Donc la condition $u_0 \neq -\frac{d}{c}$ est nécessaire.
Mais la fonction $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ (étudier les variations). Donc si $a = -d$, la condition est suffisante (réc. immédiate), mais pas si $a \neq -d$: par exemple si u_0 est un antécédent de $-\frac{b}{d}$ pour f (par le calcul, si $u_0 = \frac{d^2+bc}{-c(a+d)}$), alors $u_1 = f(u_0) = -\frac{d}{c}$ et donc u_2 n'est pas bien défini.
Dans le cas général (où $a \neq -d$), aucune des propositions n'est donc vraie.

Q10. Réponse A).
On a $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = x \Leftrightarrow ax + b = cx^2 + dx \Leftrightarrow cx^2 + (d - a)x - b = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$, qui peut être de signe quelconque, et cette équation n'admet pas $-\frac{d}{c}$ comme racine. Donc la fonction f peut admettre 0, 1 ou 2 points fixes.

Q11. Réponse A).
Voir le calcul fait en Q10.

Q12. Réponse C).
Si u_0 est un point fixe de f, alors par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Q13. Réponse B).
Vu le premier terme, seule la réponse B peut être vraie.
Or pour tout point fixe z de f, l'équation $f(z) = z$ donne $z(cz + d) = az + b$, donc $b - zd = z(zc - a)$, donc $u_{n+1} - z = \frac{au_n+b}{cu_n+d} - z = \frac{au_n+b-z(cu_n+d)}{cu_n+d} = \frac{(a-zc)u_n+b-zd}{cu_n+d} = (a - zc)\frac{u_n-z}{cu_n+d}$, et donc finalement $\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} \cdot \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$. Donc la suite $(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $\frac{a-\alpha c}{a-\beta c}$.

Q14. Réponse D).
Vu Q13, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k^n \cdot \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$, où $k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} \neq 1$ puisque $c \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$.
Posant $v_0 = \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$, on obtient $u_n - \alpha = k^n v_0(u_n - \beta)$, donc $u_n = \frac{\alpha-k^n v_0\beta}{1-k^n v_0} = \frac{\beta-\frac{\alpha}{k^n v_0}}{1-\frac{1}{k^n v_0}}$.
Ainsi si $|k| < 1$, alors $u_n \to \alpha$; si $|k| > 1$, alors $u_n \to \beta$; et si $k = -1$, alors (u_n) oscille entre deux valeurs distinctes, donc diverge.

Q15. Réponse A).
On reprend le calcul de Q13 : $u_{n+1} - \alpha = (a - \alpha c)\frac{u_n-\alpha}{cu_n+d}$.
Comme α est ici le seul point fixe de f, i.e. l'unique solution de $cx^2 + (d - a)x - b = 0$ par Q10, on a $\alpha = \frac{a-d}{2c}$, si bien que $d = a - 2\alpha c$ et donc $u_{n+1} - \alpha = \frac{(a-\alpha c)(u_n-\alpha)}{cu_n+a-2\alpha c} = \frac{(a-\alpha c)(u_n-\alpha)}{c(u_n-\alpha)+(a-\alpha c)}$.
En passant à l'inverse, $\frac{1}{u_{n+1}-\alpha} = \frac{c(u_n-\alpha)+(a-\alpha c)}{(a-\alpha c)(u_n-\alpha)} = \frac{c}{a-\alpha c} + \frac{1}{u_n-\alpha}$.

Q16. Réponse C).

Vu Q15, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_0-\alpha} + \frac{nc}{a-\alpha c}$, donc $u_n = \alpha + \frac{1}{\frac{1}{u_0-\alpha}+\frac{nc}{a-\alpha c}}$.

Comme on suppose $c \neq 0$, cela montre que $u_n \to \alpha$.

Q17. Réponse D).

Comme la fonction f est continue sur son domaine de définition, la suite (u_n) ne peut que converger vers un point fixe de f. Donc si f n'en a pas, alors la suite (u_n) diverge. Donc A) et C) sont faux, et D) est vrai.

Et l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{u_n}$ (cas $a = d = 0$ et $c = -b = 1$), i.e. de la suite $((-1)^n)$, montre que la suite (u_n) n'a pas forcément de limite, donc B) est faux.

Questions 18 à 22

Exercice sur un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ stable par multiplication. La question 20 est ambiguë : on ne sait pas de quelle base on parle.

Q18. Réponse E).

L'étude du coefficient d'indices $(1,1)$ montre qu'aucune proposition ne convient.

Par contre, on a $M(a,b,c) = aA + bB + cC$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et de plus, $A + B + C = I_3$. *(On ne note pas Id la matrice identité, mais I_3).*

Q19. Réponse A) et B).

La famille (A, B, C) trouvée en Q18 engendre E, et elle est libre en examinant les coefficients d'indices $(2,2)$, puis $(2,1)$, puis $(3,1)$ dans une combinaison linéaire $aA+bB+cC = (0)$. Il reste à faire attention au fait que si (A, B, C) est une base, alors $(2A, 2B, 2C)$ aussi ...

Q20. Réponse C).

On ne sait pas de quelle base on parle, mais en imaginant que c'est de la base (A, B, C) trouvée en Q18, on vérifie que $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$, et $AB = BA = AC = CA = BC = CB = (0)$.

Q21. Réponse D).

En développant au vu de Q20, on a $M(a,b,c)M(a',b',c') = (aA+bB+cC)(a'A+b'B+c'C) = aa'A + bb'B + cc'C = M(aa', bb', cc')$.

Q22. Réponse A).

Comme E est un sous-espace vectoriel, B) et D) sont faux.

Et vu Q21, on a $M(a,b,c)M(a',b',c') = M(aa',bb',cc') = M(a'a,b'b,c'c) = M(a',b',c')M(a,b,c)$. Donc A) est vrai et C) est faux.

Questions 23 à 28

Exercice mêlant probabilités et géométrie.

Q23. Réponse E).

L'univers est l'ensemble Ω de toutes les poignées possibles de 2 boules parmi 15, qui est de cardinal $\binom{15}{2} = \frac{15\times 14}{2} = 15 \times 7 = 105$. La probabilité sur Ω est la probabilité uniforme (toutes les poignées sont équiprobables).

L'événement G est la réunion des trois événements deux à deux incompatibles G_n : « obtenir 2 boules noires », G_b : « obtenir 2 boules blanches », et G_r : « obtenir 2 boules rouges ».

Comme pour Ω, les ensembles G_n, G_b et G_r sont respectivement de cardinal $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{b}{2} = \frac{b(b-1)}{2}$ et $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$.

Donc $g(n,b,r) = \frac{\text{card}(G)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{105}(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2}) = \frac{1}{210}(n(n-1) + b(b-1) + r(r-1))$.

Aucune proposition n'est donc correcte.

Q24. Réponse B).

Le plan passe par $N = (15, 0, 0)$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{1}{15}\overrightarrow{BN} = (1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{15}\overrightarrow{RN} = (1, 0, -1)$, donc est normal au vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$.
Donc le plan admet pour équation $x + y + z = 15$.

Q25. Réponse B) et C).

Puisque $n + b + r = 15$, le point M appartient au plan (NBR). Donc A) est faux et C) est vrai.
De plus, vu le calcul fait en Q23, $g(n, b, r) = \frac{1}{210}(n^2 + b^2 + r^2 - n - b - r) = \frac{1}{210}(OM^2 - 15)$.
Donc B) est vrai et D) est faux.

Q26. Réponse E).

Aucune des propositions ne respecte la condition $n + b + r = 15$.

Q27. Réponse A).

La distance OM est minimale quand M est le projeté orthogonal de O sur le plan (NBR), i.e. quand $M = (5, 5, 5)$ puisque le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est alors orthogonal au plan.
On a alors $OM^2 = 3 \times 5^2 = 75$ et $g(n, b, r) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$.

Q28. Réponse D).

Le joueur perd x euros si G n'est pas réalisé (probabilité $\frac{5}{7}$), et gagne $(k - 1)x$ euros si G est réalisé (probabilité $\frac{2}{7}$). Donc l'espérance de X est $E(X) = -x\frac{5}{7} + (k - 1)x\frac{2}{7} = x(\frac{2}{7}k - 1)$.
Donc le jeu est équitable si $k = \frac{7}{2}$ (il est favorable au joueur si $k > \frac{7}{2}$, et défavorable au joueur si $k < \frac{7}{2}$).

Questions 29 à 31

Exercice sur l'étude du maximum d'une fonction, mettant en jeu des fonctions usuelles et leurs développements limités. La question 31 est assez technique.

Q29. Réponse A).

La fonction f_n admet pour dérivée $f_n' : x \mapsto n(\cos x)^{n+1} - n^2(\cos x)^{n-1}(\sin x)^2$.
On a donc $f_n'(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2 x - n\sin^2 x)$, qui s'annule en $x = \frac{\pi}{2}$ et en $x_n \in [0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos^2 x_n = n\sin^2 x_n$, i.e. $\tan^2 x_n = \frac{1}{n}$, i.e. $\tan x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ car tout est positif, i.e. $x_n = \arctan(\frac{1}{\sqrt{n}})$.
Comme $f_n'(x) > 0$ pour $x \in [0; x_n[$, et $f_n'(x) < 0$ pour $x \in]x_n; \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que f admet un maximum en x_n, et uniquement en ce point.

Q30. Réponse C).

Par équivalent usuel de arctan en 0, on a $x_n = \arctan(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Q31. Réponse B).

Vu Q30, $x_n \to 0$, donc par développements limités usuels, $\sin(x_n) \underset{+\infty}{\sim} x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\cos(x_n) = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2) = 1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$, donc $(\cos x_n)^n = e^{n\ln(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-\frac{1}{2} + o(1)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
Donc $f_n(x_n) = n(\cos x_n)^n \sin(x_n) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{e}}$.

Question 32

Question isolée sur un calcul de développement limité, qui peut s'avérer encore une fois assez calculatoire si on ne profite pas au maximum de la parité de la fonction intégrée.

Q32. Réponse D).

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème fondamental du calcul intégral, elle y admet une primitive G, et $f(x) = G(x^2) - G(x)$. De plus, en prenant pour G la primitive de g qui s'annule en 0, G est impaire, car g est paire.
Il suffit donc de calculer un DL à l'ordre 4 de G en 0. Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, G l'est aussi et son DL à l'ordre 4 en 0 est donné par la formule de Taylor-Young :

$$G(x) = g(0)x + \frac{g''(0)}{6}x^3 + o(x^4)$$

dans lequel seules les puissances impaires apparaissent car G est impaire. Or $g(0) = 1$, $g'(x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ et $g''(x) = -(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$, donc $g''(0) = -1$.
Ainsi $G(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, donc $G(x^2) = x^2 + o(x^4)$, et finalement $f(x) = G(x^2) - G(x) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

Questions 33 à 36

Exercice (facile) sur l'étude de deux suites définies par une intégrale. La question 33 est ambiguë (d'un point de vue logique).

Q33. Réponse C) ? C) et D) ?

Par croissance de l'intégrale, il est vrai que la suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, donc $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$ si $n \neq 0$. De même pour (y_n).
En conséquence, les équivalences avec les propositions B), C) et D) sont logiquement vraies pour les suites (x_n) et (y_n) en jeu, mais seule l'équivalence avec C) est universelle (i.e. vraie pour toutes suites (x_n) et (y_n) réelles).

Q34. Réponse B).

Par intégration par parties : $x_{n+1} = \left[t^{n+1}\sin(t)\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^n \sin(t)\,\mathrm{d}t = \sin(1) - (n+1)y_n$.

Q35. Réponse D).

Par intégration par parties : $y_{n+1} = \left[-t^{n+1}\cos(t)\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n \cos(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)x_n - \cos(1)$.

Q36. Réponse A).

Puisque (x_n) et (y_n) tendent vers 0 par Q33, les questions Q34 et Q35 donnent :

- $ny_n = \sin(1) - y_n - x_{n+1} \to \sin(1)$,
- $nx_n = \cos(1) - x_n + y_{n+1} \to \cos(1)$.