

Partie I

Étude d'une fonction et de sa limite

I.1 Étude de la fonction f

I.1.1 La fonction $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2)dt$ est la primitive de g qui s'annule en 0 :

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient en utilisant la parité de g et $u = -t$:

$$f(-x) = \int_0^{-x} \exp(-t^2)dt = \int_0^x e^{-u^2}(-du) = -f(x).$$

Donc f est une fonction impaire.

I.1.2 $f' = g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{P}(n)$, la propriété suivante : « il existe une fonction polynôme p_n , de degré n , telle que pour tout $x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = p_n(x) \exp(-x^2)$ ».

On pose $p_1 : x \mapsto -2x$, c'est une fonction polynôme de degré 1 et pour tout réel $x : f'(x) = -2x \exp(-x^2)$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On obtient alors pour tout x :

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)'}(x) = [p_n'(x) - 2xp_n(x)] \exp(-x^2).$$

En notant $p_{n+1} : x \mapsto p_n'(x) - 2xp_n(x)$ on a bien une fonction polynôme de degré $n+1$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1.3 f est impaire et en dérivant n fois la relation « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$ » on obtient « $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(-x)$ »

p_n est paire (respectivement impaire) quand n est impair (respectivement pair).

I.1.4 La fonction $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue positive sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \geq 1$, $t \leq t^2$ donc $0 \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-t)$, or $t \mapsto \exp(-t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par comparaison g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $g = f'$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc f admet une limite finie en $+\infty$.

I.2 Développement en série de f

I.2.1 D'après la définition de l'exponentielle :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt$$

Puisque $\int_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, il suffit de justifier l'interversion série-intégrale pour obtenir le résultat voulu :

pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Justification de l'interversion :

x est un réel fixé. On note S le segment $[0, x]$ si x est positif et $[x, 0]$ sinon ; les fonctions $u_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$ sont continues sur S (donc intégrables sur S), $\sum u_n$ converge simplement sur S et la somme est $t \mapsto \exp(-t^2)$ qui est continue sur S .

par la convergence normale : $\|u_n\|_{\infty, S} \leq \frac{|x|^{2n}}{n!}$ et la série numérique $\sum \frac{|x|^{2n}}{n!}$ est convergente (sa somme est $\exp(|x|^2)$) donc la série de fonctions converge normalement sur le segment S : le théorème d'intégration terme à terme des séries fonctions continues sur le segment S s'applique ;

par le théorème général : $\int_S |u_n(t)| dt \leq \frac{|x|^{2n}}{n!} \times |x|$ et la série numérique $\sum \frac{|x|^{2n}}{n!} |x|$ est convergente donc la série numérique $\sum \int_S |u_n(t)| dt$ converge : le théorème d'intégration terme à terme des séries fonctions intégrables sur l'intervalle S s'applique.

I.2.2 D'une part en utilisant I.1.2 en $x = 0$, on a $p_n(0) = f^{(n)}(0)$.

D'autre part le développement précédent montre que f est développable en série entière au voisinage de 0 (avec un rayon de convergence infini) donc f coïncide avec la somme de sa série de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$p_{2n}(0) = 0 \text{ et } p_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

I.3 Calcul de Δ

I.3.1 On peut étudier la fonction $u \mapsto e^u - 1 - u$ ou utiliser la convexité de $\exp$: la courbe est au dessus de la tangente en $u = 0$ qui a pour équation $y = \exp(0) + \exp'(0)(u - 0) = 1 + u$ donc

$$\text{pour tout réel } u, \text{ on a } e^u \geq 1 + u.$$

I.3.2 Soit n un entier naturel non nul.

D'après la relation précédente en $-u$ on a pour $u \leq 1$: $0 \leq 1 - u \leq e^{-u}$, on élève ensuite à la puissance n : $(1 - u)^n \leq e^{-nu}$ si $u \leq 1$.

D'après la relation précédente en u on a pour $u > -1$: $0 < 1 + u \leq e^u$, on élève ensuite à la puissance $-n$: $e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n}$ si $u > -1$.

I.3.3 Soit n un entier naturel non nul.

Pour $x \in [0, 1]$, on a $u = x^2 > -1$ donc $(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2}$ donc en intégrant sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \text{ puis } \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-nx^2} dx \text{ (car } \exp(-nx^2) \geq 0 \text{)}.$$

Par ailleurs la seconde relation du I.3.3. donne pour $x \geq 0$, $e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$ relation que l'on peut intégrer car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ converge (par comparaison à $\frac{1}{x^2}$ pour la borne $+\infty$). D'où finalement :

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

I.3.4 En utilisant le changement de variable $x = \sin \theta$ ($\theta \mapsto \sin \theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^n \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = W_{2n+1} ;$$

$$\text{avec } x = \frac{1}{\sqrt{n}} u \text{ (changement affine) : } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{n}} du = \frac{\Delta}{\sqrt{n}} ;$$

et avec $x = \tan \theta$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2[$, bijectif de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$), $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta)^n \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = W_{2n-2}.$$

La relation du I.3.3 s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leq W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, on obtient $W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de même pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc par passage à la limite $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \Delta \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'où la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Partie II Étude de deux fonctions

II.1 Étude de la fonction h

II.1.1 Soit b un réel. $t \mapsto \cos(2bt) \exp(-t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|\cos(2bt) \exp(-t^2)| \leq \exp(-t^2)$. On a vu que $t \mapsto \exp(-t^2)$ était intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $t \mapsto \cos(2bt) \exp(-t^2)$ est intégrable $[0, +\infty[$ d'où l'existence de l'intégrale :

$$h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt) \exp(-t^2) dt.$$

II.1.2 Notons $P(x, y) = e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy)$ et $Q(x, y) = e^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = +2ye^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) - 2xe^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy) \text{ et}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -2xe^{-(x^2-y^2)} \sin(2xy) + 2ye^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) \text{ donc } \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) :$$

La forme différentielle ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$ donc elle est exacte sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^2$.

II.1.3 L'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \omega$ est nulle car ω est exacte.

II.1.4 γ est la réunion de quatre segments : $\int_{\gamma} \omega = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ avec :

$$I_1 = \int_{x=0}^{x=a} e^{-(x^2-0^2)} \cos(0) dx = \int_{x=0}^{x=a} e^{-x^2} dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \Delta ;$$

$$I_2 = \int_{y=0}^{y=b} e^{-(a^2-y^2)} \sin(2ay) dy = e^{-a^2} \int_{y=0}^{y=b} e^{y^2} \sin(2ay) dy \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \text{ (car l'intégrale est bornée par rapport à } a \text{)} ;$$

$$I_3 = \int_{x=a}^{x=0} e^{-(x^2-b^2)} \cos(2bx) dx = -e^{b^2} \int_{x=0}^{x=a} e^{-x^2} \cos(2bx) dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} -e^{b^2} h(b) ;$$

$$I_4 = \int_{y=b}^{y=0} e^{-(0^2-y^2)} \sin(0) dy = 0.$$

En passant à la limite quand $a \rightarrow +\infty$ dans la relation $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ on obtient

$$\Delta + 0 - e^{b^2} h(b) = 0 \text{ donc } h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

II.2 Étude de la fonction φ

II.2.1 Pour $t > 0$ fixé, $x \mapsto e^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue $\mathbb{R}$.

Pour x fixé, $t \mapsto e^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$.

De plus pour tout $t > 0$, $0 \leq e^{-t^2-x^2/t^2} \leq e^{-t^2}$ ce qui montre que $t \mapsto e^{-t^2-x^2/t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et directement par domination :

$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est paire (évident).

II.2.2 $\frac{\partial}{\partial x}(e^{-t^2-x^2/t^2}) = -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-x^2/t^2}.$

pour $t > 0$ fixé, $x \mapsto -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ pour $x \in [a, b]$ on a

$$\forall t > 0, \quad 0 \leq \left| -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-x^2/t^2} \right| \leq \frac{2b}{t^2} e^{-t^2-a^2/t^2}.$$

On montre que $t \mapsto \frac{2b}{t^2} e^{-t^2-a^2/t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$: elle est continue positive sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en $t = 0$ (limite nulle par croissance comparée) et dominée pour $t \geq 1$ par $2be^{-t^2} \dots$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$.

Ceci étant valable sur tout segment de $]0, +\infty[$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

II.2.3 Pour $x > 0$, $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2-x^2/t^2} dt$, on pose $u = x/t$. Avec $du = -\frac{x}{t^2} dt$ on obtient :

$$\varphi'(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2/u^2-u^2} du = -2\varphi(x)$$

II.2.4 $\varphi(x) = K \exp(-2x)$ pour $x > 0$. Or φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $K = \lim_{0^+} \varphi = \varphi(0) = \sqrt{\pi}/2$.

$$\text{Puis, par parité, pour } x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-2|x|).$$

Partie III Calcul d'une intégrale

III.1 Étude de la fonction ψ

III.1.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t \geq 0$, $\frac{|\cos(2xt)|}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2} = \arctan'(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, on montrerait alors à l'aide du théorème de continuité que

$$x \mapsto \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2} dt$$

définit une fonction ψ continue sur $\mathbb{R}$ qui par ailleurs est clairement paire.

III.1.2 $\psi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan(b) - 0 = \frac{\pi}{2}.$

III.2 On peut voir $j_p(x)$ comme une intégrale à paramètre mais en fait elle se calcule :

$$j_p(x) = \int_0^p y \exp(-(1+x^2)y^2) dy = \left[-\frac{\exp(-(1+x^2)y^2)}{2(1+x^2)} \right]_{y=0}^{y=p} = \frac{1 - \exp(-(1+x^2)p^2)}{2(1+x^2)}$$

Sous cette forme il est clair que j_p est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour x fixé $\lim_{p \rightarrow +\infty} j_p(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

III.3 $k_n(y) = \int_0^n y \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax) dx = y \int_0^n \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax) dx :$

Continuité sous le signe intégrale : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour x fixé, $y \mapsto y \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$;

pour $y \geq 0$, $x \mapsto y \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax)$ est continue sur $[0, n]$ donc intégrable sur ce segment ; soit $[0, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}^+$, on a pour $y \in [0, \beta]$ la domination $|y \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax)| \leq \beta$ ce qui est intégrable sur le segment $[0, n]$:

$(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

Pour la convergence simple on distingue $y = 0$, $k_n(0) = 0 \rightarrow 0$ et sinon

$y > 0$, $x \mapsto \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc

$$k_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} y \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax) dx \text{ et en posant } u = xy : \\ \int_0^{+\infty} y \exp(-u^2) \cos(2\frac{a}{y}u) \frac{1}{y} du = h(a/y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-a^2/y^2).$$

$(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa limite simple

est la fonction $y \mapsto \begin{cases} h(a/y) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

III.4 Soit $u_{n,p} = \int_0^n j_p(x) \cos(2ax) dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1 - $x \mapsto j_p(x) \cos(2ax)$ est continue sur $[0, n]$;

- la suite de fonction (j_p) converge simplement sur $[0, n]$ et sa limite simple est continue sur $[0, n]$;

- domination : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $x \in [0, n]$, $|j_p(x) \cos(2ax)| \leq \frac{1}{2(1+x^2)} \leq 1$, or la fonction dominante est intégrable sur $[0, n]$

donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} = \int_0^n \frac{1}{2(1+x^2)} \cos(2ax) dx.$$

III.4.2 $u_{n,p} = \int_0^n j_p(x) \cos(2ax) dx = \int_0^n \left(\int_0^p y \exp(-(1+x^2)y^2) \cos(2ax) dy \right) dx.$

Or $(x, y) \mapsto y \exp(-(1+x^2)y^2) \cos(2ax)$ est continue sur le pavé $[0, n] \times [0, p]$ donc par le théorème de Fubini :

$$u_{n,p} = \int_0^p \left(\int_0^n y \exp(-(1+x^2)y^2) \cos(2ax) dx \right) dy = \int_0^p k_n(y) \exp(-y^2) dy.$$

III.5 La fonction $y \mapsto k_n(y) \exp(-y^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et pour $y \geq 0$,

$|k_n(y) \exp(-y^2)| \leq y \cdot 1 \cdot 1 \cdot \exp(-y^2)$ ce qui montre l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$.

III.6 D'après III.4 et III.5, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{2} \int_0^n \frac{1}{1+x^2} \cos(2ax) \, dx = \int_0^{+\infty} k_n(y) \exp(-y^2) \, dy$$

On passe maintenant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ à nouveau avec le théorème de convergence dominée, on pose $f_n(y) = k_n(y) \exp(-y^2)$

– l'intégrabilité des f_n a été vue au III.5;

– la convergence simple se déduit de III.3 : (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa limite simple est la fonction $y \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-a^2/y^2 - y^2) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

– domination : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $y \geq 0$, on a $0 \leq |f_n(y)| \leq \exp(-y^2) \int_0^n y \exp(-y^2 x^2) dx$

$$0 \leq |f_n(y)| \leq \exp(-y^2) \int_0^{+\infty} y \exp(-y^2 x^2) \, dx = \exp(-y^2) \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) \, du = \exp(-y^2) \Delta$$

et la fonction dominante $y \mapsto \Delta \exp(-y^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

on obtient ainsi :

$$\psi(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cos(2ax) \, dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-a^2/y^2 - y^2) \, dy = \sqrt{\pi} \varphi(a)$$

soit en d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \sqrt{\pi} \varphi(x) = \frac{\pi}{2} \exp(-2|x|)$$