CONCOURS COMMUN CINP 2024
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI
MATHÉMATIQUES

m.laamoum2@gmail.com [1]

PROBLÈME 1

File d'attente

Partie I - Temps d'arrivée du *n*-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1 . On a $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$[T_1 = k] = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0]\right)}_{\text{«aucun client n'arrive entre les instants 0 et k-1»}} \cap \underbrace{[X_k = 1]}_{\text{«le premier client arrive à l'instant k»}}$$

les variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 = k) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0)\right) \mathbb{P}(X_k = 0) \\ &= (1-p)^{k-1} p\end{aligned}$$

Ainsi T_1suit une loi géométrique de paramètre p et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1} p}$.

Q2. A est l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file » , A se réalise si tous les événements $([T_1 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne se réalisent pas , donc

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{[T_1 = k]} = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} [T_1 = k]}$$

les événements $([T_1 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints, on déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [T_1 = k]\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_1 = k]\,) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p\end{aligned}$$

[1] https://tinyurl.com/2qyzzrbd

la somme de la série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}$vaut $\frac{1}{p}$ ce qui donne $\mathbb{P}(A) = 0$. Donc presque sûrement on aura un client au moins qui arrive dans la file à un certain instant $k \in \mathbb{N}^*$.

Q3. La fonction génératrice de T_1 est donnée par la série entière $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T_1 = k)\, t^k$, on a $\mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$ donc $\frac{\mathbb{P}(T_1 = k+1)}{\mathbb{P}(T_1 = k)} = 1-p$ la règle de D'Alembert donne $\boxed{R = \frac{1}{1-p}}$.

Soit $t \in \left]-R, R\right[$ on a

$$\begin{aligned} G_{T_1}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p\, t^k \\ &= pt\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^{k-1} \\ &= \frac{pt}{1-(1-p)t} \end{aligned}$$

d'où pout tout $t \in \left]-R, R\right[$, $\boxed{G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}}$

Q4.

- On a $R > 1$,donc G_{T_1} est définie et dérivable en 1 , comme $G'_{T_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_1 = k)\, t^{k-1}$ pout tout $t \in \left]-R, R\right[$,

alors

$$G'_{T_1}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{E}(T_1)$$

et on a $G'_{T_1}(t) = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$ ce qui donne $\boxed{\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{p}}$.

- La formule de Koenig-Huygens donne $\mathbb{V}(T_1) = \mathbb{E}(T_1^2) - \mathbb{E}(T_1)^2$, avec $\mathbb{E}(T_1^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(T_1 = k)$.

On a pout tout $t \in \left]-R, R\right[$, $G''_{T_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(T_1 = k)\, t^{k-1}$, donc

$$G''_{T_1}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(T_1 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(T_1 = k) \; - \mathbb{E}(T_1)$$

donc $\mathbb{E}(T_1^2) = G''_{T_1}(1) + \mathbb{E}(T_1)$.

Puisque $G''_{T_1}(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$ alors $G''_{T_1}(1) = \frac{2(1-p)}{p^2}$ et $\mathbb{E}(T_1^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}(T_1) = \frac{1-p}{p^2}}$.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n.

- Loi de T_n :

On a $T_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$[T_n = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0]\right) \cap [X_k = 1]$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{P}(T_n = k) = (1-p)^{k-1}p}$ et T_n suit une loi géométrique de paramètre p .

- Les variables aléatoires T_k sont indépendantes et de même loi que T_1 , donc

$$\boxed{\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_1) + ... + \mathbb{E}(T_n) = \frac{n}{p} \text{ et } \mathbb{V}(D_n) = \mathbb{V}(T_1) + ... + \mathbb{V}(T_n) = \frac{n(1-p)}{p^2}}$$

- La fonction génératrice G_{D_n} est donnée par :

$$G_{D_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t) \text{ , pour tout } t \in]-R, R[$$

donc $\boxed{G_{D_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^n}$

Q6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1, 1[$ on a $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ avec $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$ et $\binom{\alpha}{0} = 1$.

On a donc pour t tel que $(1-p)t \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} G_{D_n}(t) &= (pt)^n (1-(1-p)t)^{-n} \\ &= (pt)^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-n}{k} (-(1-p)t)^k\right) \end{aligned}$$

calculons $\binom{-n}{k}$:

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)...(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} G_{D_n}(t) &= p^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k \binom{n+k-1}{n-1} t^{k+n} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} p^n (1-p)^{k-n} \binom{k-1}{n-1} t^k \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{G_{D_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} p^n (1-p)^{k-n} \binom{k-1}{n-1} t^k}$.

Comme $G_{D_n}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 = k)\, t^k$ alors par unicité du développement en séries entières on obtient pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\boxed{\mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II. 1 - Une suite récurrente

Soient $a>0$ et $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \exp(a(x-1))\end{cases}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $z_1\in\,]0,1[\quad$ et $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*, z_{n+1}=f\left(z_n\right)$

Q7.

- <u>Par récurrence sur n</u> : on a $z_1\in\,]0,1[$ supposons $z_n\in\,]0,1[$ donc $z_n-1<0$ et $0<f\left(z_n\right)<1$ par suite $z_{n+1}\in\,]0,1[$.

D'où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $z_n\in\,]0,1[$.

- Soit $n\geq 2$, on a

$$\begin{aligned} z_{n+1}-z_n &= f\left(z_n\right)-f\left(z_{n-1}\right)\\ &= \exp(a(z_n-1))-\exp(a(z_{n-1}-1))\\ &= \exp(a(z_{n-1}-1))\left(\exp(a(z_n-z_{n-1}))-1\right)\end{aligned}$$

comme $\exp(x)-1$ est du même signe que x alors $z_{n+1}-z_n$ est du même signe que z_n-z_{n-1}.

Ainsi par récurrence sur n on a $z_{n+1}-z_n$ est du même signe que z_2-z_1.

Q8. On déduit de la question Q7. que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et bornée , donc converge vers une limite $\ell\in[0,1]$.

La fonction f est continue, par passage à la limite dans la relation $z_{n+1}=f\left(z_n\right)$ on obtient : $f(\ell)=\ell$.

Q9. Soit la fonction $\psi:\begin{cases}]0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\ln(x)-a(x-1)\end{cases}$.

On pour tout $x>0$, on a $\exp(\psi(x))=\dfrac{x}{f(x)}$ ce qui donne $0\leqslant\psi(x)\Leftrightarrow f(x)\leqslant x$ et $\psi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x$.

Q10. On suppose que $0<a\leqslant 1$.

On a $\psi'(x)=\dfrac{1}{x}-a$, donc ψ est strictement croissante sur $]0,1[$, de plus $\psi(1)=0$ et $\displaystyle\lim_{x-0^+}\psi(x)=-\infty$

Donc ψ est négative sur $]0,1]$ et elle ne s'annule qu'en $x=1$. On en déduire que 1 est l'unique solution, dans $[0,1]$, de $f(x)=x$, ainsi $z_n\to 1$.

Q11. On suppose que $a>1$.

- On a ψ' s'annule en $x=\dfrac{1}{a}$ et ψ est croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{a}\right[$,decroissante sur $\left]\dfrac{1}{a},1\right]$, ce qui donne

$\psi\left(\dfrac{1}{a}\right)>\psi\left(1\right)=0$. Or $\displaystyle\lim_{x-0^+}\psi(x)=-\infty$ donc ψ s'annule en un unique $\alpha\in\left]0,\dfrac{1}{a}\right[$.

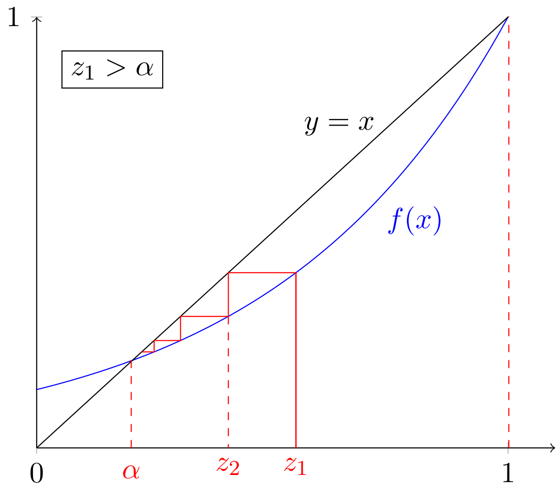
Ce qui donne que l'équation $f(x)=x$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha\in\,]0,1[$

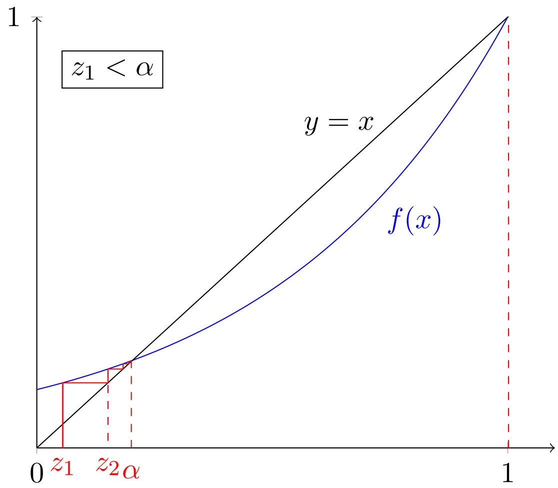
t	$-\infty$		α		$\frac{1}{a}$		1
$\psi'(t)$			$+$		0	$-$	
$\psi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\psi(\frac{1}{a})$	$\searrow$	0

• Si $z_1 \in]0,\alpha]$: ψ est négative sur $]0,\alpha[$ par suite $f(x) > x$ pour tout $x \in]0,\alpha[$, donc $z_2 > z_1$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante , de plus f est croissante donc $f(]0,\alpha[) =]e^{-a},\alpha[\subset]0,\alpha[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,\alpha[$, on en déduit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'unique point fixe qui est dans $[0,\alpha]$ ainsi $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

• Si $z_1 \in]\alpha,1[$, ψ est positive sur $]\alpha,1[$ par suite $f(x) < x$ pour tout $x \in]\alpha,1[$ donc $z_2 < z_1$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante , et $f(]\alpha,1[) =]\alpha,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]\alpha,1[$,ainsi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un des points fixes qui sont dans $[\alpha,1]$, puisque $z_n < z_1 < 1$ donc $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

Conclusion : pour tout $z_1 \in]0,1[$ on a $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.





II. 2 - Groupes de clients

Q12. L'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [V_n = 0]$ se réalise dès que l'un, au moins, des événements $[V_n = 0]$ est réalisé. Ceci signifie qu'au moins un des groupes est vide, c'est-à-dire qu'aucun client n'arrive pendant le service d'un des groupes, par suite tous le événements $[V_k = 0]$ et $k \geq n$ se réalise , et le service est terminé (*par exemple fin de journée de travail ou une longue pause*) .

Q13. Pour chaque instant $k \in [\![1,n]\!]$ il y'a X_k *(0 ou 1)* clients qui arrivent , donc $N_n = X_1 + ... + X_n$.

Par indépendance des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $G_{N_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$ or pour tout k on a $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ donc $G_{X_k}(t) = (1-p)+pt$ par suite $\boxed{G_{N_n}(t) = ((1-p)+pt)^n}$ ce qui donne pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}}$, N_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n,p)$. *(Si $k > n$, $\mathbb{P}(N_n = k) = 0$).*

Q14.

• Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Quand $S = n$, il y a n instants pendants lesquels des clients peuvent venir avant que le second client ne soit servi , V_1 est alors le nombre de clients arrivés pendant n instants, avec pour chaque instant une probabilité p d'y arriver et ceci indépendamment, on peut écrire dans ce cas : $V_1 = X_1 + ... + X_n$, *(égalité conditionnée par $S = n$)* , par le même raisonnement que la question Q13. elle suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n,p)$, donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $\boxed{\mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \text{ et } \mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n) = 0 \text{ si } k > n}$.

Remarquons que si $S = 0$ alors la durée de service est nulle, le groupe est vide et $\mathbb{P}(V_1 = 0 \mid S = 0) = 1$.

- Comme $([S=n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, par la formule de probabilité totale on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(V_1=k|S=n)\,\mathbb{P}(S=n)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(V_1=k|S=n)\,\mathbb{P}(S=n)+\underbrace{\sum_{n=0}^{k-1}\mathbb{P}(V_1=k|S=n)\,\mathbb{P}(S=n)}_{=0}
\end{aligned}$$

S suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S=n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$, par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{p}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\\
&= p^k(1-p)^{-k}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{k!\,(n-k!)\,n!}(1-p)^n\lambda^n\\
&= \frac{p^k(1-p)^{-k}e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k!)}((1-p)\lambda)^n\\
&\overset{m=n-k}{=} \frac{p^k(1-p)^{-k}e^{-\lambda}}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}((1-p)\lambda)^{m+k}\\
&= \frac{p^k(1-p)^{-k}((1-p)\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!}e^{(1-p)\lambda}\quad(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}=e^x)\\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $\boxed{\mathbb{P}(V_1=k)=\dfrac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}}$ ainsi V_1 suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Q15. On note $z_n=\mathbb{P}(V_n=0)$.

- Par construction, pour $n\in\mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $[V_k=0]$ est réalisé pour tout $k\geqslant n$, donc si $[V_k=0]$ est réalisé alors $[V_{k+1}=0]$ est réalisé , ce qui signifie que $[V_k=0]\subset[V_{k+1}=0]$ par conséquent la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et elle est majorée par 1 donc elle converge .
- On a $Z=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}[V_n=0]$ et la suite des événements $([V_n=0])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante , le théorème de la limite monotone donne

$$\mathbb{P}(Z)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(V_n=0)=\lim_{n\to+\infty}z_n$$

Q16. Notons G_k le k-ième groupe de clients .

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $j\in\mathbb{N}^*$,supposons $V_1=j$, c'est le nombre de clients du premier groupe , posons $G_1=\{c_1,...,c_j\}$.

Soit $i\in[\![1,j]\!]$, pendant que le client c_i est servi un groupe de clients arrivent et vont engendrer un autre groupe de clients et ainsi de suite jusqu'à l'instant $n+1$, posons $G_{n+1,i}$ ce groupe de clients, (*c'est le groupe constitués à partir du clients c_i jusqu'à l'instant* $n+1$ *)*,posons $U_i=\mathrm{Card}\,(G_{n+1,i})$.

Ainsi on a :

- $G_{n+1}=\bigcup\limits_{i=1}^{j}G_{n+1,i}$,réunion disjointe .
- $V_{n+1}=\mathrm{Card}\,(G_{n+1})=U_1+...+U_j$.
- $[V_{n+1}=0]=\bigcap\limits_{i=1}^{j}[U_i=0]$ et les U_i sont indépendantes .

- $\mathbb{P}(U_i = 0) = \mathbb{P}(V_n = 0)$ *(car $G_{n+1,i}$ est construit par le même processus que G_n ,c'est sans considérer le groupe engendré par le client 0,il y a donc n groupes et le dernier est vide*)

Donc $\mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \prod_{i=1}^{j} \mathbb{P}(U_i = 0) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$.

On a aussi $\mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = 0) = 1$, donc le résultat est vrai pour $j = 0$.

Ce qui prouve que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\boxed{\mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j\ .}$

Q17. La famille $([V_1 = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, la formule de probabilité totale donne

$$\mathbb{P}(V_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_{n+1} = 0 | V_1 = k)\, \mathbb{P}(V_1 = k)$$

on a $\mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = k) = \mathbb{P}(V_n = 0)^k = z_n^k$ et d'après la question Q14. V_1 suit une loi de Poisson de paramètre λp donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_{n+1} = 0) &= e^{-\lambda p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p z_n)^k}{k!} \\ &= \exp(\lambda p (z_n - 1))\end{aligned}$$

ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{z_{n+1} = \exp(\lambda p (z_n - 1))\ .}$

Q18. D'après Q10. et Q11. on a

- Si $\lambda p \leq 1$ alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc presque surement le service s'arrête quand n devient grand .
- Si $\lambda p > 1$ alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha \in]0, 1[$, définie dans Q11.

La durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et d'ésperance égale à λ .

Ainsi λ est donc le temps de service moyen. Si le temps de service moyen est élevé , avec le temps on a peu de chance que tous les clients soient servis .

EXERCICE
Équivalent de Stirling

Q19. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto t^{t-1}e^{-t} \end{cases}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto f(x,t)$..

- En 0 : $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.
- En 0 : $+\infty$: $f_x(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x.

Finalement f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x \in]0, +\infty[$, et donc $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-1}\, dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Q20.

- Soit $x > 0$ et $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Par une intégration par parties on a

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t} dt = -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t} dt$$

Quand a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$, on obtient la relation fonctionnelle

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

- On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-1}\, dt = 1$, par récurrence, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$

Q21. La relation fonctionnelle permet d'écrire pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$ et donc ,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n) \times (2n-1) \times \ldots \times 3 \times 2}{2^n (2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$, posons $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ et $dt = 2u\, du$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}\ .}$

La relation reste vrai quand $n = 0$.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln k - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t\, dt \\
&= \ln((n-1)!) - \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t\, dt
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\ln\Gamma(n) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k}$

Q23. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \ln k - \left[t\ln(t) - t \right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \\
&= \ln k - \left((k+\frac{1}{2})\ln(k+\frac{1}{2}) - (k-\frac{1}{2})\ln(k-\frac{1}{2}) - 1 \right) \\
&= \ln k - \left[(k+t)\ln(k+t) - (k+t) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \ln k - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(k+t)dt \\
&= \ln k - \int_{0}^{\frac{1}{2}} \ln(k+t)dt - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \ln(k+t)dt \\
&= \ln k - \int_{0}^{\frac{1}{2}} \ln(k+t)dt - \int_{0}^{\frac{1}{2}} \ln(k-t)dt
\end{aligned}$$

ce qui donne $\rho_k = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\ln k - (\ln(k+t) - \ln(k-t))\right)\, dt$, que l'on simplifie par

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\ln k^2 - (\ln(k^2-t^2)\right)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt$$

Q24. La fonction $t \mapsto -\ln(1-t)$ est croissante sur $[0,1]$ donc , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 \leq \rho_k \leq \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) dt = \frac{-1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

comme $\dfrac{-1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{1}{4k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8k^2}$ donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{-1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$ converge , par comparaison la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Q25.

- D'après la question Q22. on a $\ln\Gamma(n) = \displaystyle\int_1^{n-\frac{1}{2}} \ln t dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$, posons $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k = S$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = S + o(1)$,

par suite

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(n) &= \int_1^{n-\frac{1}{2}} \ln t dt + S + o(1) \\
&= \left[t\ln(t) - t \right]_1^{n-\frac{1}{2}} + S + o(1) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{3}{2} + S + o(1)
\end{aligned}$$

posons $c = \dfrac{3}{2} + S$, alors on a $\boxed{\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)}$.

- Ce qui donne

$$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}\, e^c\, e^{o(1)} \text{ et } e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

ainsi $\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}.}$

Q26. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0,n]$ et on note.

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u = \dfrac{t}{n}$ alors pour tout $x > 0$ on a

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \, du$$

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$et $x > 0$, une première intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(x) &= n^x \int_0^1 \left(\frac{u^x}{x}\right)' (1-u)^n \, du \\
&= n^x \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_0^1 + \frac{n^x}{x} n \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1} \, du \\
&= \frac{n^x}{x} n \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1} \, du
\end{aligned}$$

après k intégration par parties, $k \in [\![2, n-1]\!]$,on obtient

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x (n(n-1)...(n-k+1))}{x(x+1)...(x+k-1)} \int_0^1 u^{x+k-1}(1-u)^{n-k} \, du$$

et à la n -ième étape on a donc

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x (n(n-1)...1)}{x(x+1)...(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} \, du \text{ et } \int_0^1 u^{x+n-1} \, du = \frac{1}{x+n}$$

ce qui donne $\boxed{\Gamma_n(x) = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$

Q28. Ecrivons $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, avec $f_n(t) = \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ .On a alors

- Domination et intégrabilité :

Soit $g : \left\{ \begin{array}{c} [0,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -t - \ln(1-t) \end{array} \right.$ on a $g'(t) = \dfrac{t}{1-t}$, g est donc croissante sur $[0,1[$, $g(0) = 0$ donc g est positive sur $[0,1[$.

Donc pour tout $]0,n[$ on a $g(\frac{t}{n}) \geq 0$ et $n\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -t$ d'où $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

Ainsi pour tout $]0,+\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$ et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par suite f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Convergence simple :

Soit $x > 0$ et $t \in]0,+\infty[$, pour tout $n \geq t$ on a

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \\
&= t^{x-1} \exp\left(n\ln(1 - \frac{t}{n})\right) \\
&= t^{x-1} \exp\left(-t + o(1)\right)
\end{aligned}$$

donc $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}e^{-t}$, ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f_x(t)dt,$$

par suite pour tout $x > 0$ $\boxed{\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)\ .}$

Et la question Q27. donne pour tout $x > 0$ $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\ .}$

Q29.

- Soit $x > 0$,on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\Gamma(x+n) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1)$ par récurrence on a $\Gamma(x+n) = (x+n-1)...x\Gamma(x)$.

Donc

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\, n^x} = \frac{(x+n-1)...x}{(n-1)!\, n^x}\Gamma(x) = \frac{n}{x+n}\left(\frac{(x+n)...x}{n!\, n^x}\Gamma(x)\right)$$

D'après la question Q28. on a pour tout $x > 0$, $\boxed{\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\, n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}$.

- D'après la question Q25 on a $\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$.

La question Q21. donne $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ donc

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\, n^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}\frac{1}{\Gamma(n) n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)^2 n^{\frac{1}{2}}}$$

par suite

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\, n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\frac{e^c (2n)^{2n-\frac{1}{2}} e^{-2n}}{(e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n})^2 n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} e^{-c}$$

Comme $\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(n)\, n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ alors $e^c = \sqrt{2\pi}$ et $\boxed{\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}.}$

PROBLÈME 2

Blocs de Jordan

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \\ X \mapsto J_\lambda X \end{array}\right.$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ canoniquement associé à J_λ.

Q30.

- On a $u_0(e_j) = \left\{\begin{array}{l} e_{j+1} \text{ si } j \in [\![1, p-1]\!] \\ 0 \text{ si } j = p \end{array}\right.$ donc $u_0^2(e_j) = \left\{\begin{array}{l} e_{j+1} \text{ si } j \in [\![1, p-2]\!] \\ 0 \text{ si } j \in \{p-1, p\} \end{array}\right.$, et pour $p = 2$ on a $u_0^2(e_1) = u_0^2(e_2) = 0$.

- On en déduit en déduire :

$$J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $J_0^2 = 0$ si $p = 2$.

- Par récurrence on a $u_0^{p-1}(e_j) = \begin{cases} e_1 & = e_p \\ 0 \text{ si si } j \in [\![2, p]\!] \end{cases}$ et $u_0^p(e_j) = 0$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

Ainsi

$$J_0^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_0^p = 0$$

$J_0^p = 0$ et $J_0^{p-1} \neq 0$ donc J_0 est nilpotente d'indice p.

Q31.

- La matrice J_λ de u_λ, dans la base canonique , est triangulaire avec λ sur la diagonale donc $\mathrm{Sp}\,(u_\lambda) = \{\lambda\}$.
- On a $J_\lambda - \lambda I_p = J_0$ et J_0 est de rang $p-1$, donc $\dim\ker(u_\lambda - \lambda id) = 1$ et on a $u_0(e_p) = 0$ ce qui donne : $E_\lambda(u_\lambda) = vect\,\{e_p\}$.

Q32. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

- Si V est stable par u_λ , V est aussi stable par λid donc il est stables par $u_\lambda - \lambda id = u_0$.
- Si V est stable par u_o , V est aussi stable par λid donc il est stables par $u_0 + \lambda id = u_\lambda$.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note v l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $\mathcal{B}_V = \left(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_k\right)$ une base de V, que l'on complète, par une famille $\mathcal{C}$, en une base $\widetilde{\mathcal{B}} = \left(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_p\right)$ de $\mathbb{R}^P$.

Q33. On a pour tout $j \in [\![1, j]\!]$ $u_\lambda(\widetilde{e}_j) = v(\widetilde{e}_j) \in V$ c.a.d $u_\lambda(\widetilde{e}_j) \in \text{vect}\left\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_k\right\}$, ainsi la matrice de u_λ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ est triangulaire par blocs :

$$Mat_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u_\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathcal{B}_V & \mathcal{C} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} Mat_{\mathcal{B}_V}(v) & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathcal{B}_V \\ \mathcal{C} \end{array} \end{array}$$

Q34.

- Le polynôme caractéristique u_λ s'écrit

$$\chi_{u_\lambda}(X) = \det\left(Xid - Mat_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u_\lambda)\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} XI_k - Mat_{\mathcal{B}_V}(v) & -B \\ \hline 0 & XI_{p-k} - A \end{array}\right)$$

ce qui donne $\chi_{u_\lambda}(X) = \det\left(XI_k - Mat_{\mathcal{B}_V}(v)\right)\det\left(XI_{p-k} - A\right)$, par suite de χ_v diviseχ_{u_λ} .

- On a $\chi_{u_\lambda}(X) = \chi_{J_\lambda}(X) = (X-\lambda)^p$, le polynôme χ_v divise χ_{u_λ} et $\deg\chi_v = \dim V = k$ donc $\chi_v(X) = (X-\lambda)^k$. Ainsi $\mathrm{Sp}\,(v) = \{\lambda\}$ donc $E_\lambda(v) \neq \{0\}$ or $E_\lambda(v) \subset E_\lambda(u_\lambda) = \text{vect}\,\{e_p\}$, par suite $E_\lambda(v) = \text{vect}\,\{e_p\} \subset V$ d'où $e_p \in V$.

Q35. Si on suppose que $\mathbb{R}^P = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$, d'après la question précédente $e_p \in V \cap W$ ce qui est absurde. Une telle décompositions est donc impossible.

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On rappelle la propriété suivante : *Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to E$, $g : I \to F$ et $B : E \times F \to G$ bilinéaire , si f et g sont dérivables sur I alors l'application $\varphi : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et $\varphi'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f'(t), g(t))$.*

Q36. Soit X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ, et $\widetilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$.
On a $\widetilde{X}'(t) = \lambda e^{\lambda t} X_0$ (*on a dérivé les coordonnée de* $\widetilde{X}$) et $J_\lambda X_0 = \lambda X_0$ donc $\widetilde{X}'(t) = e^{\lambda t} J_\lambda X_0 = J_\lambda X_0$, ainsi $\widetilde{X}$ est une solution particulière de (S).

Q37. Pour une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ notons $[M]_{i,j} = m_{i,j}$. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$

On a φ est dérivable si et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et $t \in \mathbb{R}$, $[\varphi(t)]_{i,j}$ est dérivable.
De l'expression de φ on déduit que

$$[\varphi(t)]_{i,j} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} \left[J_0^k\right]_{i,j}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, donc φ est dérivable .
Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$[\varphi'(t)]_{i,j} = \left([\varphi(t)]_{i,j}\right)' = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda e^{\lambda t} t^k + k e^{\lambda t} t^{k-1}}{k!} \left[J_0^k\right]_{i,j}$$

donc

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda e^{\lambda t} t^k + k e^{\lambda t} t^{k-1}}{k!} J_0^k \\
&= \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k \\
&= \lambda\varphi(t) + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-2} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^{k+1} \\
&= \lambda\varphi(t) + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^{k+1} \text{ (car } J_0^p = 0 \text{)} \\
&= \lambda\varphi(t) + J_0\varphi(t) \ \ (= \lambda\varphi(t) + \varphi(t) J_0 \ ) \\
&= (\lambda I_p + J_0)\, \varphi(t) \ \ (= \lambda\varphi(t) + \varphi(t) J_0 \ )
\end{aligned}$$

ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_A) = \exp(tJ_\lambda)\, J_\lambda}$.

Q38.

- On a $J_0^p = 0$ donc $J_0^k = 0$ pour tout $k \geq p$ ains pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$, remarquons que

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} I_p + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k$$

et les J_0^k sont des matrices triangulaires de diagonales nulles donc $\exp(tJ_\lambda)$ est triangulaire de diagonale $(e^{\lambda t},...,e^{\lambda t})$ ce qui donne $\det(\exp(tJ_\lambda)) = e^{n\lambda} \neq 0$ donc $\exp(tJ_\lambda)$ inversible .

- Soit $g : t \mapsto \varphi(t)\varphi(-t)$, le produit de matrices est bilinéaire donc g est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \varphi'(t)\varphi(-t) - \varphi(t)\varphi'(-t) \\ &= J_\lambda \exp(tJ_\lambda)\exp(-tJ_\lambda) - \exp(tJ_\lambda) J_\lambda \exp(-tJ_\lambda) \end{aligned}$$

or J_λ et $\exp(tJ_\lambda)$ commutent donc $g'(t) = 0$ et g est constante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $g(t) = g(0) = I_p$. Ainsi $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible et son inverse est $\exp(-tJ_\lambda)$.

Q39.

- L'application qui a une matrice et un vecteur associe leur produit est bilinéaire, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$Y'(t) = (\exp(-tJ_\lambda))' X(t) + \exp(-tJ_\lambda) X'(t) = -J_\lambda (\exp(-tJ_\lambda)) X(t) + \exp(-tJ_\lambda) X'(t)$$

J_λ et $\exp(-tJ_\lambda)$ commutent ce qui donne

$$Y'(t) = \exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t))$$

On a donc X est solution de (S) si et seulement si $Y'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi X est solution de (S) si et seulement si Y est constante sur $\mathbb{R}$.

- De ce qui précèdent on a : X est solution de (S) si et seulement si $Y(t) = Y(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est équivalent à $X(t) = \exp(tJ_\lambda) X_0$ avec $X_0 = Y(0)$.

Q40. Supposons $\lambda > 0$, soit $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda) e_p$, rappelons que $J_0 e_p = 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$X(t) = \left(e^{\lambda t} I_p + e^{\lambda t}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{t^k}{k!} J_0^k\right) e_p = e^{\lambda t}\, e_p + e^{\lambda t}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{t^k}{k!}\left(J_0^k e_p\right)$$

d'où $X(t) = e^{\lambda t}\, e_p$, par suite $\|X(t)\| = e^{\lambda t} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ donc X non bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Q41. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X \in E$.

- On a **,** pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on a $[AX]_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j$ donc

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right)^2$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz donne $\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{p}(a_{i,j})^2 \sum_{j=1}^{p}(x_j)^2$,par conséquent

$$\|AX\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{i,j})^2 \sum_{j=1}^{p}(x_j)^2 = \mathcal{N}(A)^2\|X\|^2$$

d'où l'on a $\boxed{\|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\|X\|}$.

- Soit $\lambda < 0$, et X solutions de (S) , donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \exp(tJ_\lambda) X_0$ avec $X_0 \in E$.

Soit $t \geq 0$, l'inégalité précédente s'écrit

$$\|X(t)\| \leqslant \mathcal{N}(\exp(tJ_\lambda))\|X_0\|$$

et on a

$$\mathcal{N}(\exp(tJ_\lambda)) = \mathcal{N}\left(e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}\ J_0^k\right) \leq e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{|t|^k}{k!}\mathcal{N}\left(\ J_0^k\right)$$

donc

$$\|X(t)\| \leqslant e^{\lambda t}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{|t|^k}{k!}\mathcal{N}\left(\ J_0^k\right)\|X_0\|\right)}_{\text{polynomiale}}$$

par suite $X(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, ainsi X est bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Q42. Si $\lambda = 0$ alors il existe $X_0 \in E$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \exp(tJ_0)\, X_0 = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}\ J_0^k X_0$,qui est une fonction polynomiale, elle n'est bornée sur $\mathbb{R}^+$ que si $X_0 = 0$. La solution nulle est l'unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.