Mines Math I MP 2018

A. Préliminaires

1) On a $E(X)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k)+\sum_{k=m}^{n} kP(X=k)$ donc

$$E(X)\leqslant \sum_{k=1}^{m-1}(m-1)P(X=k)+\sum_{k=m}^{n} nP(X=k)\leqslant (m-1)\sum_{k=1}^{n} P(X=k)+\sum_{k=m}^{n} nP(X=k)$$

Or on a $\sum_{k=m}^{n} P(X=k)=P(X\geqslant m)$. Conclusion: $\boxed{E(X)\leqslant m-1+nP(X\geqslant m)}$

Remarque : les majorations ci-dessus sont valables si $m=1$.

2) On trace la fonction $x\longmapsto \ln x$ sur $[1,+\infty[$ qui est continue, croissante et positive sur $[1,+\infty[$.

La formule demandée est vrai si $n=1$ (on a même l'égalité).

Soit $n\geqslant 2$, on a :

$\forall k\geqslant 2$, $\forall t\in[k-1,k]$: $\ln t\leqslant \ln k$ que l'on intègre de $k-1$ à k : $\int_{k-1}^{k}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant \ln k$ puis on somme de 2 à n : $\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln k$ soit $\int_{1}^{n}\ln t\,\mathrm{d}t\leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln k$ (car $\ln 1=0$).

Comme $\int_{1}^{n}\ln t\,\mathrm{d}t=\Big[t\ln t-t\Big]_{1}^{n}=n\ln n-n+1$, Conclusion: $\boxed{\forall n\geqslant 1 : n\ln n-n+1\leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln k}$

On en déduit que $e^{n\ln n-n+1}\leqslant e^{\sum_{k=1}^{n}\ln k}=n!$.

Or $(\frac{n}{e})^n=e^{n\ln n-n}\leqslant e^{n\ln n-n+1}\leqslant n!$ Conclusion: $\boxed{\forall n\geqslant 1 : \left(\frac{n}{e}\right)^n\leqslant n!}$

B. Le lemme se sous-additivité de Fekete

3) Faire un dessin sur une droite horizontale de la situation des éléments présentés.

Comme u est bornée, U_n est un ensemble borné et comme $u_n\in U_n$, U_n est non vide,

Conclusion: $\boxed{(\underline{u}_n) \text{ et } (\overline{u}_n) \text{ sont bien définies}}$

$\forall n\geqslant 1 : U_{n+1}\subset U_n$, donc $\overline{u}_n$ majore U_{n+1} et $\underline{u}_n$ minore U_{n+1}, on a alors : $\overline{u}_{n+1}\leqslant \overline{u}_n$ et $\underline{u}_{n+1}\geqslant \underline{u}_n$.

En conséquence, la suite $(\underline{u}_n)$ est croissante et la suite $(\overline{u}_n)$ est décroissante.

Comme ces deux suites sont bornées (par les bornes de (u_n)), par le théorème de limite monotone on a : Conclusion: $\boxed{(\underline{u}_n) \text{ et } (\overline{u}_n) \text{ sont monotones et convergentes}}$

4) • On a vu au **3)** que la suite $(\overline{u}_n)$ **est décroissante**.

Comme , pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\in U_n$, $u_n\leqslant \overline{u}_n$ donc $\overline{u}\succeq u$.

Soit v telle que v soit décroissante et telle que $u\preceq v$, montrons que $\overline{u}\preceq v$.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \leqslant v_k \leqslant v_n$ car v est décroissante. v_n est donc un majorant de U_n, donc $\overline{u}_n \leqslant v_n$ et donc $\overline{u} \preceq v$. Conclusion: $\boxed{\overline{u} \text{ est la plus petite suite décroissante et plus grande que } u}$

• De la même manière, la suite $\underline{u}$ **est décroissante**.

Comme , pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in U_n$, $\underline{u}_n \leqslant u_n$ donc $\underline{u} \preceq u$.

Soit v telle que v soit croissante et telle que $v \preceq u$, montrons que $v \preceq \underline{u}$.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \geqslant v_k \geqslant v_n$ car v est croissante. v_n est donc un minorant de U_n, donc $v_n \leqslant \underline{u}_n$ et donc $v \preceq \underline{u}$. Conclusion: $\boxed{\underline{u} \text{ est la plus grande suite croissante et plus petite que } u}$

5) Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \leqslant v_k \leqslant \overline{v}_n$ car $\overline{v}_n$ est un majorant de V_n. $\overline{v}_n$ est donc un majorant de U_n, donc $\overline{u}_n \leqslant \overline{u}_n$. Comme ces deux suites sont convergentes, on a

Conclusion: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \overline{u}_n \leqslant \lim_{n \to +\infty} \overline{v}_n}$

6) $\boxed{\Longrightarrow]}$ Supposons que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ soient adjacentes. Comme pour tout entier $n \geqslant 1$, $\underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n$,grâce au théorème d'encadrement : u converge et sa limite est égale à celle de $\overline{u}$ et $\underline{u}$.

$\boxed{\Longleftarrow]}$ Supposons que u converge. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant N$ $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ (avec ℓ limite de u). On a donc $\forall k \geqslant N$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$, d'où pour tout $n \geqslant N$: $U_n \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et donc $\ell - \varepsilon \leqslant \underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On en déduit que les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ convergent vers ℓ.

Conclusion:

$\boxed{\overline{u} \text{ et } \underline{u} \text{ sont adjacentes si et seulement si } u \text{ converge et dans ce cas les trois suites ont la même limite}}$

7) On a : $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ et comme $0 \leqslant r < n$, $1 \leqslant n \leqslant r + n$ et comme $m \geqslant 2n$, $m - 2n = (q-2)n + r \geqslant 0$ d'où $(q-2)n \geqslant -r > -n$, soit $q - 2 > -1$ (car $n > 0$) et donc $q > 1$.

On a donc $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ avec $n(q-1) > 0$ et $n + r > 0$. On peut appliquer la sous-additivité : $u_m = u_{n(q-1)+n+r} \leqslant u_{n(q-1)} + u_{n+r}$.

Enfin par récurrence sur q, on a $u_{n(q-1)} \leqslant (q-1)u_n$: en effet c'est vraie pour $q = 2$ et si c'est vraie pour $q \geqslant 2$, $u_{n(q)} \leqslant u_{n(q-1)} + u_n \leqslant (q-1)u_n + u_n = (q+1-1)u_n$.

Conclusion: $\boxed{u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}}$

Multiplions par $\dfrac{1}{m}$, on a donc $\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{(q-1)u_n}{m} + \dfrac{u_{n+r}}{m}$.

Tout d'abord, comme on a $n \leqslant n + r \leqslant n + n - 1 = 2n - 1$, on a $\dfrac{u_{n+r}}{m} \leqslant \dfrac{\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})}{m}$.

Ensuite $\dfrac{q-1}{m} - \dfrac{m-n-r}{nm} = \dfrac{1}{m}\dfrac{nq - n - m + n - r}{n} = 0$

Conclusion: $\boxed{\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{m-n-r}{m} \cdot \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})}{m}}$

8) On prend $n = 1$ et pour tout $m \geqslant 2$, on a :

$0 \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{m-1-0}{m} \cdot \dfrac{u_1}{1} + \dfrac{\max(u_1)}{m} \leqslant 1 \cdot \dfrac{u_1}{1} + \dfrac{u_1}{1} = 2u_1$. Conclusion: $\boxed{\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$

Soit $n \geqslant 1$ fixé et soit m quelconque tel que $m \geqslant 2n$. Posons $v_m = \dfrac{m-n-r}{m} \cdot \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})}{m}$

On a $\forall m \geqslant 2n$: $\dfrac{u_m}{m} \leqslant v_m$. La démonstration du 5) reste valable si l'on n'a l'inégalité qu'à partir d'un certain rang et comme $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que $\lim\limits_{m\to+\infty} w_m = 1 \cdot \dfrac{u_n}{n} + 0$ par théorèmes généraux et car $\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})$ est indépendant de m, on peut conclure avec le **5)** :

Conclusion: $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1 : \underline{m \to +\infty}\overline{\lim}\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_n}{n}}$

9) Posons $x_n = \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$ et $y_n = \dfrac{u_n}{n}$. La suite x est constante donc convergente vers sa valeur.

D'autre part, on a $x \preceq y$ et la suite x est croissante, avec le **4)** on a donc $x \preceq \underline{y}$ et comme x converge vers $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$ et $\underline{y}$ vers $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$, on a ensuite grâce au **5)** : $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$, puis enfin il est clair que pour tout suite z, $\underline{z}_n \leqslant \overline{z}_n$ et $\lim \underline{z}_n \leqslant \lim \overline{z}_n$ donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n} \leqslant \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$.

Grâce au **6**) on a : Conclusion: $\boxed{\text{La suite } \left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge dans } \mathbb{R}}$

10) • Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i(\omega) > x$ alors $Y_n(\omega) > \dfrac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x) \subset (Y_n > x)$ d'où $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x)\Big) \leqslant P\Big(Y_n > x\Big)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi, $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x)\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_1 > x) = 1^n = 1$.

On en déduit que $1 \leqslant P\Big(Y_n > x\Big) \leqslant 1$. Conclusion: $\boxed{P\Big(Y_n > x\Big) = 1}$

• Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i(\omega) \geqslant x$ alors $Y_n(\omega) \geqslant \dfrac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x) \subset (Y_n \geqslant x)$ d'où

$P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)\Big) \geqslant P\Big((Y_n \geqslant x)\Big)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi, $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_1 \geqslant x) = P(X_1 \geqslant x)^n > 0$.

Conclusion: $\boxed{P\Big((Y_n \geqslant x)\Big) > 0}$

11) • Soit $\omega \in \left(\Big\{Y_m \geqslant x\Big\} \cap \Big\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\Big\}\right)$, on a alors

$Y_{m+n}(\omega) = \dfrac{1}{m+n}\sum\limits_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) = \dfrac{1}{m+n}\Big(mY_m + \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega)\Big) \geqslant \dfrac{1}{m+n}(mx + nx) = x$, donc

$Y_{m+n}(\omega) \geqslant x$. Conclusion: $\boxed{\left(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}}$

• Par le lemme des coalitions, Y_m et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes donc

$$P\Big(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\Big) = P\Big(Y_m \geqslant x\Big) \cdot P\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\Big) \leqslant P\Big(Y_{m+n} \geqslant x\Big)$$

Or $P\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\Big) = P\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant x\Big)$ car les X_i suivent la même loi (rigoureusement on montrerait que $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ ont même loi et en utilisant $P(X_i = a) = P(X_j = a)$).

Conclusion: $\boxed{P\Big(Y_{m+n} \geqslant x\Big) \geqslant P\Big(Y_m \geqslant x\Big)P\Big(Y_n \geqslant x\Big)}$

12) Soit $x \in \mathbb{R}$.

<u>**Premier cas**</u> : $P(X_1 \geqslant x) = 0$, dans ce cas, $P(X_1 < x) = 1$ et donc avec le **10)**, pour tout entier $n \geqslant 1$: $P(Y_n < x) = 1$, donc $P(Y_n \geqslant x) = 0$. Conclusion: $\boxed{\Big((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\Big)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$

<u>**Deuxième cas**</u> : $P(X_1 \geqslant x) > 0$, dans ce cas, avec le **10)**, pour tout entier $n \geqslant 1$: $P(Y_n \geqslant x) > 0$.

On peut donc poser $u_n = -\ln(P(Y_n \geqslant x))$ pour tout entier $n \geqslant 1$. De l'inégalité de la question précédente, on en déduit que pour tous m, n dans $\mathbb{N}^*$: $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$. Enfin par définition d'une probabilité, $u_n \geqslant 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

On applique le **9)** : la suite $(\frac{u_n}{n})$ converge vers un réel ℓ. On en déduit par critère séquentiel que $(e^{\frac{u_n}{n}})$ converge vers un réel e^{ℓ}. Or $e^{\frac{u_n}{n}} = \dfrac{1}{P(Y_n \geqslant x)^{\frac{1}{n}}}$

Conclusion: $\boxed{\Big((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\Big)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e^{-\ell}}$

13) <u>**Amorce**</u> :

Si $s = 1$ alors il n'y a qu'une seule pile qui contient de bas en haut $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Soit un jeton $a_j = z$, la suite à un élément $b = (a_j)$ est bien :

• décroissante de longueur $s = 1$,

• le jeton n°1 de valeur $b_1 = a_j = z$ est dans l'unique pile n°1 ,

• $b_1 = a_j = z$.

$\Big($Pas obligatoire, mais utile pour comprendre rapidement ce qui se passe :

Si $s = 2$ alors il y a deux piles qui contiennent $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

Soit un jeton $a_j = z$ de la deuxième pile. Si on a posé ce j-ième jeton sur la deuxième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la première pile, à ce moment là, un élément a_k avec $k < j$ et $a_j \leqslant a_k$.

Posons $b = (a_k, a_j)$ c'est bien une suite décroissante de longueur 2, pour $i = 1$ le jeton de valeur $b_1 = a_k$ est dans la pile 1 , pour $i = 2$ le jeton de valeur $b_2 = a_j$ est dans la pile 2 et $b_2 = z$. $\Big)$

<u>Hérédité</u>

Supposons le résultat vraie pour s et soit une répartition des jetons qui donne $s + 1$ piles. Soit un jeton de la $s + 1$-ième pile de valeur $z = a_j$. Comme pour $s = 2$, si on a posé ce j-ième jeton sur cette $s + 1$-ième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la s-ième pile, à ce moment là, un élément $z' = a_k$ avec $k < j$ et $a_j \leqslant a_k$.

On applique pour z' l'hypothèse de récurrence :

il existe une liste $b = (b_1, \ldots, b_s)$ décroissante de longueur s, pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$ le jeton n°i de valeur b_i est dans la i-ième pile et $b_s = z'$

La suite $b' = (b_1, \ldots, b_s, z)$ possède alors toutes les propriétés demandées car $k < j \Longrightarrow a_j \leqslant a_k$ et $b_{s+1} = z$. <u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{On a le résultat demandé pour tout } s \in \mathbb{N}^*}$

14) On range donc les $pq+1$ éléments de la suite a selon le procédé de l'énoncé. Soit s le nombre de piles que cela a crée.

<u>Premier cas</u> : $s \geqslant q + 1$

Dans ce cas avec le **13)**, il existe une suite $b = (b_1, \ldots, b_s)$ extraite de la liste a et décroissante. La liste $b = (b_1, \ldots, b_{q+1})$ est extraite de la liste a , elle est décroissante et de longueur $q + 1$.

<u>Deuxième cas</u> : $s \leqslant q$

Dans ce cas , montrons qu'il y a au moins une pile qui contient au moins $p + 1$ éléments. Si les s piles avaient toutes un nombre inférieur ou égal à p alors les s piles auraient un nombre inférieur ou égal à $ps \leqslant pq < pq + 1$: **<u>absurde</u>**. Il existe une pile qui contient au moins $p + 1$ éléments. Notons $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}}, \ldots, a_{i_t})$ cette pile.

On a alors $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{p+1}})$ qui est extraite de la liste a , elle est strictement croissante et de longueur $p + 1$. <u>Conclusion</u>:

La liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p + 1$ ou une liste extraite décroissante de longueur $q + 1$.

<u>Remarque</u> : le principe du deuxième cas s'appelle le principe des tiroirs : s'il y a 5 tiroirs et 6 chapeaux à ranger, il y aura au moins un tiroir qui recevra deux chapeaux.

15) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si $\omega \in (A_1 = i) \cap (A_2 = i)$, alors $B(\omega)(1) = B(\omega)(2) = i$: impossible car $B(\omega)$ est une bijection. Donc $(A_1 = i) \cap (A_2 = i) = \emptyset$ et $P\Big((A_1 = i) \cap (A_2 = i)\Big) = 0$.

Or $P(A_1 = i) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} P(A_1 = i / B = \sigma) \cdot P(B = \sigma)$ (c'est la F.P.T.), donc $P(A_1 = i) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n} \frac{1}{n!}$ d'où $P(A_1 = i) = P(A_2 = i) = \dfrac{1}{n} \neq 0$.

On ne peut donc avoir $P(A_1 = i) \cdot P(A_2 = i) = P\Big((A_1 = i) \cap (A_2 = i)\Big)$

<u>Conclusion</u>: $\boxed{A_1, \ldots, A_n \text{ ne sont pas mutuellement indépendantes}}$

16) <u>**Erreur d'énoncé**</u> : il faut que la liste s soit strictement croissante (par exemple si $k = 3$ et $s = (1, 1, 1)$ alors $P(A^s) = 1 \neq \dfrac{1}{6}$).

Soient donc $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k)$ telle que $s_1 < \cdots < s_k$.

Posons $\mathcal{S}_{n,s}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que $\sigma(s_1) < \cdots < \sigma(s_k)$.

Montrons que <u>$A^s = (B \in \mathcal{S}_{n,s})$</u> :

$\omega \in A^s \iff B(\omega)(s_1) < B(\omega)(s_2) < \cdots B(\omega)(s_k) \iff B(\omega) \in \mathcal{S}_{n,s} \iff \omega \in (B \in \mathcal{S}_{n,s})$

Puisque B suit une loi uniforme, on a :$P(A^s) = P(B \in \mathcal{S}_{n,s}) = \dfrac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s_1 & \cdots & s_2 & \cdots & s_k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(s_1) & \cdots & \sigma(s_2) & \cdots & \sigma(s_k) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Pour déterminer une permutation de $\mathcal{S}_{n,s}$, on commence par choisir les k images de $s_1, \ldots, s_k$: $s'_1, \ldots, s'_k$. Cela revient donc à choisir une suite strictement croissante $1 \leqslant s'_1 < \ldots < s'_k \leqslant n$. Ce nombre de possibilités est $\dbinom{n}{k}$. Il reste ensuite $n - k$ éléments (ce sont les éléments de l'ensemble : $\{1, \ldots, n\} - \{s'_1, \ldots, s'_k\}$) à placer sur la deuxième ligne de σ : il y a donc $(n-k)!$ possibilités de les placer.

On en déduit que $|\mathcal{S}_{n,s}| = \dbinom{n}{k}(n-k)!$ <u>Conclusion</u>: $\boxed{P(A^s) = \dfrac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|} = \dfrac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}}$

17) • Posons $\mathcal{C}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste croissante extraite de $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ soit de longueur ℓ.

Posons $\mathcal{D}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste décroissante extraite de $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ soit de longueur ℓ.

Montrons que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux. Pour cela considérons l'application Φ de S_n dans

S_n qui à une permutation σ associe la permutation σ' définie par $\sigma'(k) = n+1-\sigma(k)$. Il est clair que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $n+1-\sigma(k) \in \{1,\ldots,n\}$ et que si $\Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2)$ alors $\sigma_1 = \sigma_2$. On en déduit que Φ est injective et comme S_n est de cardinal fini, Φ est bijective.

Enfin si $\sigma \in S_n$ et σ possède une liste croissante extraite de $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ de longueur ℓ, alors $\Phi(\sigma) \in S_n$ et $\Phi(\sigma)$ possède une liste décroissante extraite de $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ de longueur ℓ. On déduit que $\Phi(\mathcal{C}_{n,\ell}) = \mathcal{D}_{n,\ell}$ et donc que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux.

On a donc $P(B \in \mathcal{C}_{n,\ell}) = \dfrac{|\mathcal{C}_{n,\ell}|}{n!} = \dfrac{|\mathcal{D}_{n,\ell}|}{n!} = P(B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

D'autre part , par double inclusion, on a : $(C_n = \ell) = (B \in \mathcal{C}_{n,\ell})$ et $(D_n = \ell) = (B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

Conclusion: $\boxed{\forall \ell \in \{1,\ldots,n\} : P(C_n = \ell) = P(D_n = \ell) \text{ et donc } C_n \text{ et } D_n \text{ ont même loi}}$

- Il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $p^2+1 \leqslant n < (p+1)^2+1 \quad (p = \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor)$.

On appliquant le **14)** à la suite formée par les p^2+1 premiers éléments, on a $C_n \geqslant p+1$ ou $D_n \geqslant p+1$. On a donc $C_n + D_n \geqslant p+1+1$ (puisque l'une des deux valeurs est supérieure à $p+1$ et l'autre est supérieure à 1), ce qui donne $E(C_n + D_n) = E(C_n) + E(D_n) \geqslant p+2$

D'une part $p+2-\sqrt{n} = \dfrac{(p+2)^2 - n}{p+2+\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{(p+1)^2+1+2(p+1)-n}{p+2+\sqrt{n}} > 0$ d'où $p+2 \geqslant \sqrt{n}$.

D'autre part C_n et D_n ont la même loi, donc $E(C_n) = E(D_n)$.

On a donc $2E(C_n) \geqslant p+2 > \sqrt{n}$. Conclusion: $\boxed{E(C_n) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}}$ (Merci Stéphane !)

18) On a $(C_n \geqslant k) \subset \displaystyle\bigcup_{s \in T} A^s$ où T est l'ensemble des suites strictement croissantes de $\{1,\ldots,n\}$ et de longueur k

Appliquons l'inégalité de Boole : $P(C_n \geqslant k) \leqslant P\Big(\displaystyle\bigcup_{s\in T} A^s\Big) \leqslant \sum_{s\in T} P\Big(A^s\Big) = \sum_{s\in T} \frac{1}{k!}$ et comme $|T| = \dbinom{n}{k}$, on a l'inégalité demandée. Conclusion: $\boxed{P(C_n \geqslant k) \leqslant \dfrac{\binom{n}{k}}{k!}}$

19) - Posons $i = \lfloor -\alpha e\sqrt{n}\rfloor$, on a $i \leqslant -\alpha e\sqrt{n} \leqslant i+1$ donc $-i-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant -i$. Posons $k = -i$, on a donc $k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$ et comme $\alpha e\sqrt{n} > 1$, $-\alpha e\sqrt{n} < 1$ et donc $i \leqslant -2$

Conclusion: $\boxed{k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*}$

- On a $(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \subset (C_n > k-1) = (C_n \geqslant k)$ car C_n est à valeurs entières.

On a donc $P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \dfrac{\binom{n}{k}}{k!} \leqslant \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!^2} \leqslant \dfrac{n^k}{k!^2} \leqslant n^k\Big((\dfrac{e}{k})^k\Big)^2 = \Big(\dfrac{e\sqrt{n}}{k}\Big)^{2k}$

On en déduit donc que $P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2k} \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2\alpha e\sqrt{n}}$ car $2k \geqslant 2\alpha e\sqrt{n}$ et $\dfrac{1}{\alpha} < 1$.

Conclusion: $\boxed{P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}}$

20) • Utilisons le **1)** avec le k du **19)** avec $\alpha = 1 + \dfrac{1}{n^{1/4}} > 1$: $E(C_n) \leqslant k - 1 + nP(X \geqslant k)$.

On a vu au **19)** que $P(X \geqslant k) = P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$ et $k - 1 < \alpha e\sqrt{n}$.

On a donc $\dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\alpha e\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2ae\sqrt{n}} = (1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})e + \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^{1/4}}}\right)^{2(1+\frac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}}$

Posons $\varepsilon_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^{1/4}}}\right)^{2(1+\frac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}}$

$\ln(\varepsilon_n) = \dfrac{1}{2}\ln n - 2(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}\ln(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})$

Or $2(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}\ln(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}}) \sim \dfrac{2}{n^{1/4}}$ donc par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\varepsilon_n) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant (1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})e + \varepsilon_n \text{ avec } \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0}$

• On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant 2e + M$ où M est un majorant de la suite (ε_n) qui converge vers 0. La suite $\left(\dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\right)$ est donc bornée.

Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})e + \varepsilon_n\right) = e$.

On conclut avec le **5)** et **6)**. Conclusion: $\boxed{\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \text{ existe et } \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e}$

FIN