

## Centrale.Supélec - Maths 1

Proposition de corrigé  
Khachane et Taoufik

## I - Résultats préliminaires

I.A - Distance de  $A$  à  $\mathcal{S}_s$ 

## I.A.1)

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $A = A_s + A_a$  avec  $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $A_a \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

- 

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) &\implies A = A^T = -A \\ &\implies A = 0 \end{aligned}$$

- $tr$  est une forme linéaire vérifiant  $tr(M^T) = tr(M)$ ,  $tr(MN) = tr(NM)$  donc :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) &\implies A^T = A, B^T = -B \\ &\implies tr(A^T B) = tr((A^T B)^T) \\ &\implies tr(A^T B) = tr(B^T A) \\ &\implies tr(A^T B) = tr(-BA) \\ &\implies tr(A^T B) = -tr(BA^T) \\ &\implies tr(A^T B) = -tr(A^T B) \\ &\implies tr(A^T B) = 0 \\ &\implies A \perp B \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## • Calcul de dimensions :

Soit  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (i.e.  $E_{i,j} = (\delta_{i,k} \delta_{j,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ ).

La famille  $((E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n})$  est une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  donc  $dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Comme  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors

$$dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**I.A.2** Comme  $A = A_s + A_a$  avec  $(A_s, A_a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

alors  $A_s$  est le projeté orthogonale de  $A$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . D'après le théorème de la projection orthogonale,  $A_s$  est l'unique vecteur de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\|A - A_s\|_2 = \min\{\|A - S\|_2, S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$$

Donc,  $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A - A_s\|_2 \leq \|A - S\|_2$  et  $\|A - A_s\|_2 = \|A - S\|_2$  si et seulement si  $S = A_s$ .

## I.B - Valeurs propres de $A_s$

### I.B.1

• Pour  $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A_s X \geq 0$ .

**C.N** Comme  $sp_{\mathbb{R}}(A_s) \subset \mathbb{R}_+$ , alors, d'après le théorème spectral, il existe  $(X_1, \dots, X_n)$  une BON de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A_s$ . Donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_i \geq 0, A_s X_i = \lambda_i X_i$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tels que  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ . Donc  $A_s X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i X_i$

et  $X^T = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^T$ .

D'où  $X^T A_s X = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \geq 0$ .

**C.S** Soit  $\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(A_s)$ . Alors il existe un vecteur unitaire de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A_s X = \lambda X$ .  
Donc

$$0 \leq X^T A_s X = \lambda X^T X = \lambda.$$

D'où  $sp_{\mathbb{R}}(A_s) \subset \mathbb{R}_+$  et donc  $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

• Pour  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A_s X > 0$ .

**C.N** Comme  $sp_{\mathbb{R}}(A_s) \subset \mathbb{R}_+^*$ , alors, d'après le théorème spectral, il existe  $(X_1, \dots, X_n)$  une BON de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A_s$ . Donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_i > 0, A_s X_i = \lambda_i X_i$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Alors il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ .

Donc  $A_s X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i X_i$  et  $X^T = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^T$ .

D'où  $X^T A_s X = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i > 0$ .

• **C.S** Soit  $\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(A_s)$ . Alors il existe un vecteur unitaire de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A_s X = \lambda X$ .  
Donc

$$0 < X^T A_s X = \lambda X^T X = \lambda.$$

D'où  $sp_{\mathbb{R}}(A_s) \subset \mathbb{R}_+^*$  et donc  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### I.B.2

Soit  $\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(A)$ . Il existe un vecteur unitaire  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A X = \lambda X$ . D'après le théorème spectral, il existe  $(X_1, \dots, X_n)$  une BON de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A_s$ . Donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, A_s X_i = \lambda_i X_i$  avec  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Il existe, donc,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ . Donc  $X^T X = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ .

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 = X^T A_s X = \lambda X^T X = \lambda \leq \lambda_n.$$

D'où  $\min sp_{\mathbb{R}}(A_s) \leq \lambda \leq \max sp_{\mathbb{R}}(A_s)$ .

Si  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $\min sp_{\mathbb{R}}(A_s) > 0$  et on en déduit, d'après ce qui précède, que 0 n'est pas une valeur propre de A. Donc A est inversible.

### I.B.3

#### I.B.3.a

• **Existence** : Comme  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors, d'après le théorème spectral, il existe  $P$  une matrice orthogonale telle que  $P^T A_s P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , avec les  $\lambda_i > 0$ . Posons alors  $B = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^T$ . Donc  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $B^2 = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T = A_s$  et comme les valeurs propres de  $B$  sont les  $\sqrt{\lambda_i} > 0$ , alors  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Unicité** : Soit  $B' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $B'^2 = A_s$ .

$B'$  est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(B')} E_{B'}(\lambda)$ . Mais si  $\lambda$  est une valeur propre de  $B'$ , alors  $\ker(B' - \lambda I_n) \subset \ker(B'^2 - \lambda^2 I_n) = \ker(A_s - \lambda^2 I_n)$ . De plus, les valeurs propres de  $B'$  étant positive, les  $\lambda^2$ ,  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(B')$ , sont deux à deux distincts ou encore les  $\ker(A_s - \lambda^2 I_n)$ ,  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(B')$ , sont deux à deux distincts.

Ceci montre que pour chaque  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(B')$ ,  $\ker(B' - \lambda I_n) = \ker(A_s - \lambda^2 I_n)$  et que les  $\lambda^2$ ,  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(B')$ , sont toutes les valeurs propres de  $A_s$ .

Ainsi, nécessairement la matrice  $P^T B' P$  est une matrice diagonale  $D$ . L'égalité  $B'^2 = A_s$  fournit  $D^2 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  puis  $D = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  (car les valeurs propres de  $B'$  sont strictement positives.) Et finalement  $B' = B$ .

### I.B.3.b

On a, d'après la question précédente, il existe  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A_s = B^2$ . Donc  $A = B^2 + A_a = B(I_n + B^{-1}A_a B^{-1})B$  ( $B$  est inversible car  $0 \notin \text{sp}_{\mathbb{R}}(B)$ .) Posons  $Q = B^{-1}A_a B^{-1}$ . Alors

$$Q^T = (B^{-1})^T (A_a)^T (B^{-1})^T = -(B^T)^{-1} A_a (B^T)^{-1} = -B^{-1} A_a B^{-1} = -Q.$$

Donc  $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et, d'après la multiplicativité du déterminant, on a

$$\det(A) = \det(B^2) \det(I_n + Q) = \det(A_s) \det(I_n + Q).$$

### I.B.3.c

Comme  $Q$  est antisymétrique, alors  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(Q) \subset \{0\}$  et les valeurs propres complexes de  $Q$  sont imaginaires pures. En effet :

- Soit  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(Q)$ . Alors, il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  unitaire tel que  $QX = \lambda X$ . Donc  $X^T Q X = \lambda = (X^T Q X)^T = -X^T Q X = -\lambda$ . D'où  $\lambda = 0$ .
- Soit  $\lambda$  une valeur complexe de  $Q$ . Alors, il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  unitaire ( $\bar{X}^T X = X^T \bar{X} = 1$ ) tel que  $QX = \lambda X$ . Donc  $\bar{X}^T Q X = \lambda = (\bar{X}^T Q X)^T = -X^T Q \bar{X} = -X^T Q \bar{X} = -\lambda X^T \bar{X} = -\lambda$ . D'où  $\lambda = -\bar{\lambda}$ . c-à-d  $\lambda$  est imaginaire pure.

Comme  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors si  $\lambda$  est une valeur propre imaginaire pure,  $\bar{\lambda} = -\lambda$  est aussi une valeur propre de  $Q$ .

Or  $Q$  est donc semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire supérieure  $T$  dont les termes diagonaux éventuels sont  $p$  zéros ( avec  $p = m(0)$  ) et  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_r, \bar{\lambda}_r$  avec  $p$  et  $r$  deux entiers tels que  $p + 2r = n$ .

Donc  $I_n + Q$  est donc semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire supérieure  $T_1 = I_n + T$ . D'où les termes diagonaux de  $T_1$  sont les  $p - 1$  et  $1 + \lambda_1, 1 + \bar{\lambda}_1, \dots, 1 + \lambda_r, 1 + \bar{\lambda}_r$ .

D'où  $\det(I_n + Q) = \prod_{i=1}^r (1 + \lambda_i)(1 + \bar{\lambda}_i) = \prod_{i=1}^r (1 + |\lambda_i|^2) \geq 1$  car les  $\lambda_i$  sont des imaginaires pures.

Donc  $\det(A) \geq \det(A_s)$ .

### I.B.4

On a  $AA^{-1}A^T = A^T = A_s - A_a$ . Donc  $A_s - A_a = A(A^{-1})_s A^T + A(A^{-1})_a A^T$ .

Comme  $A_s, A(A^{-1})_s A^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $A_a, A(A^{-1})_a A^T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors  $A_s = A(A^{-1})_s A^T$ . Donc  $\det(A_s) = \det(A) \det((A^{-1})_s) \det(A^T) = (\det(A))^2 \det((A^{-1})_s)$  car  $\det(A) = \det(A^T)$ .

## I.C - Partie symétrique des matrices orthogonales

### I.C.1

On a, si  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , alors, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$X^T B X = (X^T B X)^T = X^T B^T X = -X^T B X \implies X^T B X = 0.$$

Soit  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$ . Alors il existe un vecteur unitaire de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A_s X = \lambda X$ .

Donc, puisque  $A$  est orthogonal, alors  $\|AX\|^2 = X^T A^T A X = \|X\|^2 = 1$  et  $\|A^T X\| = \|X\| = 1$  (car  $A^T \in O_n(\mathbb{R})$ ).

D'où

$$|\lambda| = \|A_s X\| = \frac{1}{2} \|AX + A^T X\| \leq \frac{1}{2} (\|AX\| + \|A^T X\|) = 1.$$

Donc  $\lambda \in [-1, 1]$ .

### I.C.2

Soit  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ . Supposons qu'il existe  $A \in O_2(\mathbb{R})$  telle que  $A_s = S$ .

Or, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $A_a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ . Donc  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Et comme  $A \in O_2(\mathbb{R})$ ,

alors, on a nécessairement  $\alpha^2 + \frac{1}{4} = \alpha^2 + 1 = 1$  ce qui est absurde.

Donc, pour cette matrice  $S$ , il n'existe aucune matrice  $A \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $A_s = S$ .

### I.C.3.a

On a  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$  et les sous espaces propres associés aux valeurs propres de  $S$  dans  $] -1, 1[$  sont de dimension paire, alors d'après le théorème spectral, il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $P^T S P =$

$$\begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & (0) \\ & & A_1 & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & A_r \end{pmatrix} \text{ où}$$

-  $p, q$  et  $r$  des entiers naturels tels que  $p + q + 2r = n$ .

-  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$  où  $\lambda_i \in ] -1, 1[$ .

Soit, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & -\alpha_i \\ \alpha_i & \lambda_i \end{pmatrix}$  où  $\alpha_i = \sqrt{1 - \lambda_i}$ .

Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $B_i \in O_2(\mathbb{R})$ . Soit donc  $D = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & (0) \\ & & B_1 & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & B_r \end{pmatrix}$  est une

matrice orthogonale et donc  $A = P B P^T$  est une matrice orthogonale et c'est facile de voir que  $A_s = S$ .

### I.C.3.b

On a  $A \in O_n(\mathbb{R})$ , alors il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^T A P = D = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & (0) \\ & & R_{\theta_1} & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix},$

avec

- $p, q$  et  $r \in \mathbb{N}$  tels que  $p + q + 2r = n$ .
- $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$  où  $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

$$\text{Donc } A_s = S = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}P(D + D^T)P^T = P \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & V_{\theta_1} & & (0) \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & V_{\theta_r} \end{pmatrix} \text{ où } V_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}.$$

Donc  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$  et  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \cos(\theta_i) \in ]-1, 1[$  car  $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et les sous espaces propres associées à ces valeurs propres sont de dimension paire.

## II - Matrices F-singulières

### II.A - Cas où F est un hyperplan

#### II.A.1)

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est singulière} &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, AX = 0 \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), Z^T AX = 0 \\ &\iff A \text{ est } E_n - \text{singulière.} \end{aligned}$$

#### II.A.2

Comme  $H$  est un hyperplan de  $E_n$  et  $N$  un vecteur unitaire de  $E_n$  normal à  $H$ .

Alors  $H \oplus^{\perp} \mathbb{R}.N = E_n$ .

Donc

$$\begin{aligned} A \text{ est } H \text{ sigulière} &\iff \exists X \in H \setminus \{0\} \forall Z \in H, Z^T AX = 0 \\ &\iff \exists X \in H \setminus \{0\}, AX \in H^{\perp} = \mathbb{R}.N \\ &\iff \exists X \in H \setminus \{0\}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, AX = \lambda N. \end{aligned}$$

#### II.A.3

Soit  $N$  un vecteur unitaire de  $E_n$  normal à  $H$ . Si  $A$  est  $H$ -sigulière, alors, d'après la question précédente, il existe  $X$  un vecteur non nul de  $H$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $AX = \lambda N$ . Soit donc

$$X_1 = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} \in E_{n+1}. X_1 \text{ est non nul car } X \text{ est non nul et } A_n X_1 = \begin{pmatrix} AX - \lambda N \\ N^T X \end{pmatrix} = 0 \text{ car}$$

$N \perp H$  et  $AX = \lambda N$ .

Donc  $A_N$  est singulière.

Inversement, si  $A_N$  est singulière, alors il existe  $Y \in E_{n+1} \setminus \{0\}$  tel que  $A_N Y = 0$ .

On pose  $Y = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix}$  où  $X \in E_n$ .

$$A_N Y = 0 \implies \begin{cases} AX + \alpha N = 0 \\ N^T X = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X \in H \\ AX = -\alpha N \end{cases}$$

$X \neq 0$  car sinon  $\alpha = 0$  et donc  $Y = 0$  ce qui absurde. D'où  $A$  est H-singulière d'après la question précédente.

#### II.A.4

On pose  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ . Alors

$$\begin{aligned} A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} AB_1 + NB_3 & AB_2 + NB_4 \\ N^T B_1 & N^T B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} I_n = AB_1 + NB_3 \\ N^T B_1 = N^T A^{-1} \\ AB_2 + NB_4 = 0 \\ N^T B_2 = -N^T A^{-1} N \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre  $B_1 = A^{-1}$ ,  $B_3 = (0, \dots, 0)$ ,  $B_2 = -A^{-1}N$  et  $B_4 = 1$ .

#### II.A.5

D'après II.A.4, en développant le déterminant de  $B$  suivant la dernière ligne, on a  $\det(B) = \det(A^{-1})$ .

En développant le déterminant de  $A_N B$  suivant la dernière colonne, on a  $\det(A_N) \det(B) = -N^T A^{-1} \det(I_n) = -N^T A^{-1}$ .

D'où  $\det(A_N) = -N^T A^{-1} \det(A)$ .

#### II.A.6

Comme  $\det((A^{-1})_s) = 0$ , alors il existe  $N$  un vecteur unitaire non nul de  $E_n$  tel que  $(A^{-1})_s N = 0$ . Donc  $X = A^{-1}N = (A^{-1})_a N \neq 0$ .

Soit  $H = (\mathbb{R}.N)^\perp$ . Alors  $H$  est un hyperplan de  $E_n$  et comme  $(X|N) = X^T N = -N^T (A^{-1})_a N = 0$ , donc  $X$  est un vecteur non nul de  $H$ .

Or  $AX = AA^{-1}N = N$ , donc d'après II.A.2  $A$  est H-singulière.

#### II.A.7

On a  $\det(A_s) = 0$  et comme  $\det(A) \neq 0$ , alors, d'après I.B.4,  $\det((A^{-1})_s) = 0$ . Donc, d'après II.A.6, il existe un hyperplan de  $E_n$  tel que  $A$  soit H-singulière.

#### II.A.8

Comme  $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , alors, d'après I.B.1,  $\forall X \in E_n \setminus \{0\}$ ,  $X^T A_s X > 0$ .

Soit  $Y \in E_n \setminus \{0\}$ . Alors  $Y^T (A^{-1})_s Y = Y^T (A^{-1} - (A^{-1})_a) Y = Y^T A^{-1} Y$ . Or, il existe  $X \in E_n \setminus \{0\}$  tel que  $A^{-1} Y = X$ .

D'où  $Y^T (A^{-1})_s Y = X^T A^T X = X^T (A_s - A_a) X = X^T A_s X > 0$ . Donc  $(A^{-1})_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Soit  $H$  un hyperplan de  $E_n$  et  $N$  un vecteur unitaire de  $E_n$  normal à  $H$ . Alors, d'après II.A.5,  $\det(A_N) = -N^T A^{-1} N \det(A) = -N^T (A^{-1})_s N \det(A) \neq 0$ . D'où  $A_N$  est régulière et donc, d'après II.A.3  $A$  est H-régulière.

## II.B - Exemple

### II.B.1)

On a  $\det(A(\mu)) = 1$ . Donc  $A(\mu)$  est inversible pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ .

### II.B.2

On a  $A(\mu)_s = \frac{1}{2}(A(\mu) + (A(\mu))^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4-2\mu & -2 & \mu \\ -2 & 4-2\mu & \mu-2 \\ \mu & \mu-2 & 2 \end{pmatrix}$ . Et donc  $\det(A(\mu)_s) = \frac{1}{2}(\mu^3 - 3\mu^2 + 2) = \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu^2 - 2\mu - 2)$

Donc  $A(\mu)$  n'est pas inversible si et seulement si  $\mu \in \{1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$ .

### II.B.3

Soit  $H = \text{Vect}(X_1, X_2)$  avec  $(X_1, X_2, X_3)$  la base canonique de  $E_3$ . On  $X_3$  est un vecteur unitaire de  $E_3$  et normal à  $H$ . Soit  $X = X_1 + X_2$ . Alors  $X$  est un vecteur non nul de  $H$  et  $A(1)X = -X_3$ . Donc, d'après **II.A.2**  $A(1)$  est  $H$ -singulière.

## II.C - Cas où $F$ est de dimension $n - 2$

### II.C.1)

$$\begin{aligned} A \text{ est } F\text{-singulière} &\iff \exists X \in F : X \neq 0, \forall Z \in F, Z^T A X = 0 \\ &\iff \exists X \in F : X \neq 0, A X \in F^\perp \\ &\iff \exists X \in F, \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : X \neq 0, A X = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \end{aligned}$$

### II.C.2)

• Si  $A$  est  $F$ -singulière

alors il existe  $X \in F$  et il existe  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $X \neq 0$  et  $A X = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$

donc  $A_N \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = 0$  et comme  $\begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \neq 0$  ( car  $X \neq 0$  )

alors  $A_N$  est singulière.

• Réciproquement, si  $A_N$  est singulière alors il existe  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $A_N Y =$

0

On pose  $X \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -y_{n+1}$  et  $\lambda_2 = -y_{n+2}$ .

On a :

$$O = A_N Y = \begin{pmatrix} A X - \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ N_1^T X \\ N_2^T X \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A X = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \\ N_1^T X = 0 \\ N_2^T X = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations montrent que  $X \in F$  et si  $X = 0$  alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  puis  $Y = 0$  ce qui est absurde.

Le  $X$  considérée est un vecteur non nul de  $F = \text{vect}(N_1, N_2)$  vérifiant la condition de **II.C.1)** donc  $A$  est  $F$ -singulière. **II.C.3)** On a :

$$A_N B = \begin{pmatrix} AB_1 + NB_3 & AB_2 + NB_4 \\ N_1^T B_1 & N_1^T B_2 \\ N_2^T B_1 & N_2^T B_2 \end{pmatrix}$$

donc

$$A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} AB_1 + NB_3 = I_n \\ AB_2 + NB_4 \\ N^T B_1 = N^T A^{-1} \\ N^T B_2 = -N^T A^{-1} N \end{array}$$

On prend  $B_1 = A^{-1}$ ,  $B_2 = -A^{-1}N$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = I_2$ .

**II.C.4)** On pose :  $N^T A^{-1} N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A_N B) &= \begin{vmatrix} & & 0 & 0 \\ & I_n & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ N^T A^{-1} & & -a & -b \\ & & -c & -d \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2n+3}(-b) \begin{vmatrix} & & 0 \\ I_n & \vdots & \vdots \\ N^T A^{-1} & & -c \end{vmatrix} + (-1)^{2n+4}(-d) \begin{vmatrix} & & 0 \\ I_n & \vdots & \vdots \\ N^T A^{-1} & & -a \end{vmatrix} \\ &= ad - bc = \det(N^T A^{-1} N) \end{aligned}$$

de même, on trouve :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} & A^{-1} & & -A^{-1}N \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & I_2 \end{vmatrix} = \det(A^{-1})$$

d'où  $\det(A_N) = \det(N^T A^{-1} N) \det(A)$ .

**II.C.5)** Supposons qu'il existe  $P = (P_1 \ P_2) \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$  tel que  $\det(P^T A^{-1} P) = 0$ .

On pose :  $P'_i = A^{-1} P_i$ , pour  $i = 1, 2$  et  $P' = (P'_1 \ P'_2)$ .

On a  $P' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$  ( car la multiplication par une matrice inversible conserve le rang ), d'autre part :

$$P^T A^{-1} P = \begin{pmatrix} P_1^T A^{-1} P_1 & P_1^T A^{-1} P_2 \\ P_2^T A^{-1} P_1 & P_2^T A^{-1} P_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P'^T A P' = \begin{pmatrix} P_1'^T A P_1' & P_1'^T A P_2' \\ P_2'^T A P_1' & P_2'^T A P_2' \end{pmatrix}$$

et pour tout  $\forall i, j \in \{1, 2\}$ ,  $P_i'^T A P_j' = P_i^T (A^{-1})^T A A^{-1} P_j = P_i^T (A^{-1})^T P_j = P_j^T A^{-1} P_i$  donc

$$\begin{aligned} \det(P'^T A P') &= (P_1'^T A P_1')(P_2'^T A P_2') - (P_1'^T A P_2')(P_2'^T A P_1') \\ &= (P_1^T A^{-1} P_1)(P_2^T A^{-1} P_2) - (P_2^T A^{-1} P_1)(P_1^T A^{-1} P_2) \\ &= \det(P^T A^{-1} P) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant  $A = (A^{-1})^{-1}$ , on obtient la réciproque.

**Remarque 0.1.** Si on remplace la condition  $\det(P^T A^{-1} P) = 0$  par  $\det(P^T A^{-1} P) \leq 0$ , on obtient :  $\det(P'^T A P') \leq 0$  et vice versa .

Cette remarque sera utilisée dans **II.C.7**)

**II.C.6)** On a :  $\det(N'^T A N') = \begin{vmatrix} N_1'^T A N_1' & N_1'^T A N_2' \\ N_2'^T A N_1' & N_2'^T A N_2' \end{vmatrix}$  et

- $N_i'^T A N_i' = N_i'^T A_s N_i'$ , pour  $i = 1, 2$  car  $N_i'^T A_a N_i = 0$ ,  $i = 1, 2$
- $N_1'^T A N_2' = N_1'^T A_s N_2' + N_1'^T A_a N_2'$
- $N_2'^T A N_1' = N_2'^T A_s N_1' + N_2'^T A_a N_1' = N_1'^T A_s^T N_2' + N_1'^T A_a^T N_2' = N_1'^T A_s N_2' - N_1'^T A_a N_2'$

d'où  $\det(N'^T A N') = (N_1'^T A_s N_1')(N_2'^T A_s N_2') - (N_1'^T A_s N_2')^2 + (N_1'^T A_a N_2')^2$ .

**II.C.7)** On suppose que  $\det(N^T A^{-1} N) \leq 0$ , par la **remarque 0.1**, il existe

$N' = (N_1' \ N_2') \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$  vérifiant :  $\det(N'^T A N') \leq 0$ .

On munit  $E_n$  du produit scalaire  $(X, Y) \mapsto X^T A_s Y$  : ( Bilinearité évidente, symétrique car  $A_s$  l'est et définie positive par **I.B.1** ).

Le théorème de Cauchy Schwartz s'écrit :

$$\forall (X, Y) \in E_n^2, \quad (X^T A_s Y)^2 \leq (X^T A_s X)(Y^T A_s Y) \text{ avec égalité ssi la famille } (X, Y) \text{ est liée}$$

La famille  $(N_1', N_2')$  est libre donc  $(N_1'^T A_s N_2')^2 < (N_1'^T A_s N_1')(N_2'^T A_s N_2')$  puis  $\det((N'^T A N') > 0$  ce qui est absurde .

On en déduit que  $\det(N^T A^{-1} N) > 0$ .

**II.C.8)** Le  $F$  considéré dans les questions de II.C est de dimension  $n - 2$ , on a donc

$$\det(A) \geq \det(A_s) > 0 \text{ ( d'après I.B.2 et I.B.3.c )} \quad \text{et} \quad \det(N^T A^{-1} N) > 0 \text{ ( d'après II.C.7.c )}$$

donc  $A_N$  est régulière ( par **II.C.4** ) puis  $A$  est  $F$ -régulière ( par **II.C.2** ).

Ceci pour tout  $F$  sev de dimension  $n - 2$  de  $E_n$ .

## II.D - Exemple

**II.D.1)** On pose  $A = A(1)$ . On a :

$$A_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche  $N' = (N_1' \ N_2') \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$  vérifiant :  $rg(N') = 2$  et  $\det(N'^T A N') = 0$

Selon **II.C.6**, la deuxième condition sera vérifiée si :

$$N_1'^T A_s N_1' = N_1'^T A_s N_2' = N_1'^T A_a N_2' = 0$$

Pour  $N_1' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3$ ,  $N_1'^T A_s = 0 \Leftrightarrow x = y, z = 0$

on prend  $N_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et on obtient  $N_1'^T A_s N_1' = N_1'^T A_s N_2' = 0$  et  $N_1'^T A_a N_2' = z$  pour tout

$$N'_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pour avoir  $rg(N') = 2$  et  $N_1'^T A_a N'_2 = 0$ , on peut choisir :  $N'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**II.D.2)** En utilisant **II.C.5**, on pense à prendre :  $N_i = AN_i$ ,  $i = 1, 2$  et  $F = vect(N_1, N_2)^\perp$ .

On trouvera  $N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $N'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $F = vect(1, 1, 0)$ .

## II.E - Cas général

**II.E.1)** On reprend les mêmes étapes que les cas précédents : on considère une base  $(N_1, \dots, N_p)$  de  $F^T$  et  $N = (N_1 \dots N_p)$ .

On vérifie que :

$$A \text{ est F-singulière SSI } A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R}) \text{ est singulière}$$

On cherche une matrice  $B$  qui permet de trouver la relation  $\det(A_N) = \det(N^T A^{-1} N) \det(A)$ . L'équivalence précédente devient  $A$  est F-singulière SSI  $\det(N^T A^{-1} N) = 0$  ( car  $A$  inversible ).

La question **II.C.5** nous donne comment choisir  $N'$  dans  $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$  à partir de  $N$  pour avoir  $\det(N'^T AN') = 0$  : à savoir  $N' = A^{-1}N$ .

**II.E.2** Considérons  $\phi$  l'application linéaire canoniquement associée à  $N'$  :  $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ,  $\phi(X) = N'X$ .

on a  $rg(\phi) = rg(N') = p$  donc par théorème de rang, elle est injective :  $X \neq 0 \Rightarrow \phi(X) \neq 0$ .

Pour  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  non nul, on a donc  $X^T N'^T AN' X = \phi(X)^T A \phi(X) = \phi(X)^T A_s \phi(X) + \phi(X)^T A_a \phi(X) > 0$  car  $\phi(X)^T A_a \phi(X) = 0$  et  $A_s$  est symétrique définie positive.

**II.E.3** Si  $N'^T AN' X = \lambda X$  avec  $\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(N'^T AN')$  et  $X^T X = 1$  alors  $\lambda = X^T N'^T AN' X > 0$ .

**II.E.4** Si cette matrice admet une valeur propre non réelle, le conjugué l'est aussi. On aura donc :

$$\det(N'^T AN') = \prod_{\lambda \in sp_{\mathbb{C}}(N'^T AN'), Re(\lambda) > 0} |\lambda|^{2m(\lambda)} \prod_{\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(N'^T AN')} \lambda^{m(\lambda)} > 0$$

**II.E.5** On ne peut pas trouver une matrice  $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$  telle que  $\det(N'^T AN') = 0$  donc  $A$  est  $F$ -régulière, pour tout  $F$  sev de  $E_n$  de dimension  $n - p$  ( avec  $1 \leq p \leq n - 1$  i.e  $F \neq \{0\}$  et  $F \neq E$  ).

## III - Matrices positivement stables

### III.A - Exemples

**III.A.1)** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On a :  $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$

son discriminant est  $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$  :

• Si  $\Delta \geq 0$  alors  $sp(A) \subseteq \mathbb{R}$  donc

$A$  est positivement stable ssi  $sp(A) \subseteq \mathbb{R}_+^*$  ssi  $tr(A) > 0$ ,  $\det(A) > 0$

• Si  $\Delta < 0$  alors  $sp(A) = \left\{ \frac{a+d \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \right\}$  et  $\det(A) = \frac{(a+d)^2 - \Delta}{4} = \frac{tr(A)^2 - \Delta}{4}$

On a  $\det(A) \leq 0 \Rightarrow tr(A)^2 \leq \Delta < 0$

donc  $A$  est positivement stable ssi  $a + d = tr(A) > 0$  ssi  $tr(A) > 0$  et  $\det(A) > 0$ .

**III.A.2.a)** En général, la somme de deux matrices positivement stables ne l'est pas, par exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$  sont positivement stables mais  $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  ne l'est pas car  $\det(A + B) = 0$ .

**III.A.2.b)**  $A$  et  $B$  commutent, on peut donc les trigonaliser simultanément sur  $\mathbb{C}$ , de sorte qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  vérifiant :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

donc  $P^{-1}(A + B)P = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix}$

On a :  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $Re(\lambda_i) > 0$ ,  $Re(\mu_i) > 0 \implies \forall i = 1, \dots, n$ ,  $Re(\lambda_i + \mu_i) > 0$  donc la somme de deux matrices positivement stables qui commutent l'est aussi.

**III.A.3.a)** Soit  $X \neq 0$ . On a :  $\overline{X}^T AX = Y^T AY + Z^T AZ + i(Y^T AZ - Z^T AY)$

donc  $Re(\overline{X}^T AX) = Y^T AY + Z^T AZ = Y^T A_s Y + Z^T A_s Z + Y^T A_a Y + Z^T A_a Z$

comme  $Y \neq 0$  ou  $Z \neq 0$ ,  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $Y^T A_a Y = Z^T A_a Z = 0$

alors  $Re(\overline{X}^T AX) = Y^T A_s Y + Z^T A_s Z > 0$ .

**III.A.3.b)** Soient  $\lambda \in sp(A)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$  tels que :  $AX = \lambda X$ .

On a :  $\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X = \lambda \sum_{k=1}^n |x_k|^2$  donc

$$Re(\lambda) = Re \left( \frac{\overline{X}^T AX}{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \right) = \frac{Re(\overline{X}^T AX)}{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} > 0$$

D'où la stabilité positive de  $A$ .

**III.A.4)** La matrice  $A$  de la question **II.A.2.a)** convient.

**III.B.1)** La solution générale de l'équation différentielle  $y' + \lambda y = v$  s'écrit :  $y_g = y_h + y_p$

$$\text{où } \begin{cases} y_h(x) = \mu e^{-\lambda x}, & \mu \in \mathbb{C} \\ y_p(x) = e^{-\lambda x} \int_0^x v(t) e^{\lambda t} dt = \int_0^x v(t) e^{\lambda(t-x)} dt \end{cases}$$

La fonction  $u$  est une solution de cette équation sur  $\mathbb{R}^+$  donc il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ , \quad u(x) = \mu e^{-\lambda x} + \int_0^x v(t) e^{\lambda(t-x)} dt$$

Par hypothèse sur  $v$  , il existe  $M > 0$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}^+ , |v(x)| \leq M$  ( $v$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  ).  
donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ , \quad |u(x)| \leq |\mu| e^{-\operatorname{Re}(\lambda)x} + M \int_0^x e^{\operatorname{Re}(\lambda)(t-x)} dt \leq |\mu| + \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda)}$$

**III.B.2)** On pose  $T = (t_{i,j})$ . On a :

$$TU(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n t_{1,j} u_j(t) \\ \sum_{j=2}^n t_{2,j} u_j(t) \\ \vdots \\ t_{n,n} u_n(t) \end{pmatrix}$$

donc

$$U'(t) + TU(t) = 0 \iff \begin{cases} u_1'(t) + \sum_{j=1}^n t_{1,j} u_j(t) = 0 \\ u_2'(t) + \sum_{j=2}^n t_{2,j} u_j(t) = 0 \\ \vdots \\ u_n'(t) + t_{n,n} u_n(t) = 0 \end{cases}$$

On démontre par une récurrence descendante que les  $u_j$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$  :

- Pour  $k = n$  , on applique la question **III.B.1** , en prenant  $u = u_n$  ,  $\lambda = t_{n,n}$  et  $v = 0$ .
- supposons que  $u_{k+1}, \dots, u_n$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$  , on a :  $u_k' + t_{k,k} u_k = v$  avec  $v = - \sum_{j=k+1}^n t_{k,j} u_j$

comme  $v$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  ( par HR ) alors  $u_k$  l'est aussi ( toujours par **III.B.1** ).

**III.B.3)** Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice triangulaire supérieure semblable à  $A - \alpha I_n$  de sorte que :

$$T = Q^{-1}(A - \alpha I_n)Q \quad \text{avec} \quad Q \in GL_n(\mathbb{C})$$

On a :  $sp(T) = \{\lambda - \alpha , \lambda \in sp(A)\}$ .

Par hypothèse ,  $\forall i = 1, \dots, n$  ,  $\operatorname{Re}(\lambda_i - \alpha) = \operatorname{re}(\lambda_i) - \alpha > 0$  donc les composantes de toute solution de l'équation différentielle  $U'(t) + TU(t) = 0$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$  ( par **III.B.2** )

Cette équation admet la solution générale  $t \mapsto \exp(-tT)X$  où  $X$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ce qui entraîne que  $t \mapsto \exp(-tT)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

D'autre part ,  $Q \exp(-tT)Q^{-1} = \exp(-tA) \exp(t\alpha I_n) = e^{t\alpha} \exp(-tA)$  pour tout  $t \geq 0$   
d'où le résultat cherché ( car  $Q$  indépendante de  $t$  ).

### III.C - Une caractérisation des matrices positivement stables

**III.C.1)** Il suffit de montrer que les endomorphismes  $\Phi_1 : M \mapsto A^T M$  et  $\Phi_2 : M \mapsto MA$  sont positivement stables car ils commutent ( **II.A.2.** ).

Soient  $\lambda \in sp(\Phi_1)$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tels que  $\Phi_1(M) = \lambda M$

il existe au moins une colonne  $C$  de  $M$  qui n'est pas nulle , on écrit donc  $A^T C = \lambda C$

par suite  $\lambda \in sp(A^T) = sp(A)$  donc  $Re(\lambda) > 0$  ( par hypothèse ).

De même façon ( cette fois avec une ligne non nulle ) , on montre que  $\Phi_2$  est positivement stable.

**III.C.2.a)** L'endomorphisme  $\Phi$  n'admet pas de valeur propre nulle donc il est injectif puis bijectif par raison de dimension.

$I_n$  admet donc un unique antécédant par  $\Phi$  , noté  $B$ .

**III.C.2.b)**

• Par transposition de  $A^T B + BA = I_n$  , on obtient  $I_n = A^T B^T + B^T A$  donc  $B^T = B$  ( Unicité de  $B$  ).

• On a :  $(BA)_s = \frac{1}{2}(BA + (BA)^T) = \frac{1}{2}(BA + A^T B^T) = \frac{1}{2}(BA + A^T B) = \frac{1}{2}I_n$

donc  $\det(B) \det(A) = \det(\frac{1}{2}(I_n + 2(BA)_a)) = (\frac{1}{2})^n \det(I_n + 2(BA)_a) > 0$

Puisque on a vu dans la question **I.B.3.c** que  $\det(I_n + Q) \geq 1$  pour tout  $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

comme  $\det(A) = \prod_{\lambda \in sp_{\mathbb{C}}(A), Re(\lambda) > 0} |\lambda|^{2m(\lambda)} \prod_{\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(A)} \lambda^{m(\lambda)} > 0$  (  $A$  réelle , positivement stable. )

alors  $\det(B) > 0$ .

**III.C.3.a)** Soit  $t \in \mathbb{R}$  , on a :

$$\exp(-tA^T) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-tA^T)^k}{k!} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-tA)^k}{k!} \right)^T = \exp(-tA)^T \quad (\text{Linéarité et continuité de la transposition})$$

donc  $V(t) = \exp(-tA)^T \exp(-tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul , on a :  $\exp(-tA)X \neq 0$  car  $\exp(-tA)$  est inversible

donc  $X^T V(t) X = (\exp(-tA)X)^T \cdot \exp(-tA)X > 0$  d'où  $V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Posons  $V(t) = (v_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$  et pour  $i, j = 1, \dots, n$  ,  $w_{i,j}(t) = \int_0^t v_{i,j}(s) ds$

on a  $W(t) = (w_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$  et pour tout  $(i, j)$  ,  $w_{i,j} = \int_0^t v_{i,j}(s) ds = \int_0^t v_{j,i}(s) ds = w_{j,i}(t)$  donc  $W(t)$  est symétrique.

Supposons que  $t > 0$  et considérons  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . On a :

$$X^T W(t) X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j w_{i,j}(t) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \int_0^t v_{i,j}(s) ds = \int_0^t \left( \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j v_{i,j}(s) \right) ds = \int_0^t X^T V(s) X ds$$

La fonction  $s \mapsto X^T V(s) X$  est continue , positive et non nulle donc  $X^T W(t) X > 0$

d'où  $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**II.C.5)** Soient  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ . On a :

$$A^T W(t) = \begin{pmatrix} C_1^T W(t) \\ \vdots \\ C_n^T W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t C_1^T V(s) ds \\ \vdots \\ \int_0^t C_n^T V(s) ds \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{pmatrix} V(s) ds = \int_0^t A^T V(s) ds$$

de même , on montre que  $W(t)A = \int_0^t V(s)A ds$ .  
donc  $V'(t) = -A^T V(t) - V(t)A$  , par suite :

$$A^T W(t) + W(t)A = \int_0^t (A^T V(s) + V(s)A) ds = - \int_0^t V'(s) ds = V(0) - V(t) = I_n - V(0)$$

**III.C.3.c)** Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha < \min_{\lambda \in sp(A)} Re(\lambda) = \min_{\lambda \in sp(A^T)} Re(\lambda)$ .

Par **III.B.3** les fonctions  $t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA)$  et  $t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA^T)$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $t \mapsto e^{\alpha t} V(t)$  l'est aussi.

Par comparaison ,  $V$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $L := \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t)$  existe dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

et par Gendarmes ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$  ( $\forall t > 0$  ,  $\|V(t)\| \leq M e^{-\alpha t}$ )

Le passage à la limite dans l'égalité de **III.C.3.b** donne  $A^T L + LA = I_n$  et l'unicité de  $B$  entraîne que  $L = B$ .

pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $t > 0$  quelconques , on a  $X^T W(t) X \geq 0$  , à la limite :  $X^T B X \geq 0$  donc  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  comme son déterminant est positif alors elle est définie positive.