

A. Questions préliminaires.

- 1) $\mathcal{U}_2$ est évidemment réduit à la matrice J_2 donc $u_2 = 1$.
 Une matrice M de $\mathcal{U}_3$ est caractérisée par la position de l'unique zéro sur chaque ligne qui doit avoir une position différente à chaque fois de manière à ce que chaque colonne contienne également deux 1. Donc $u_3 = 3! = 6$ $\square$
- 2) Il vient immédiatement $AX_0 = 2X_0$ $\square$
- 3) Soit $\mathcal{H}_{i,j}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}_n$ comportant un 1 en position (i, j) avec (i, j) fixé. L'application qui consiste à échanger les lignes 1 et i ainsi que les colonnes 1 et j d'un élément de $\mathcal{U}_n$ est clairement une bijection de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_{i,j}$. Donc $\text{card } \mathcal{H}_{i,j} = h_n$
 Il en découle que $\sum_{U \in \mathcal{U}_n} U = h_n J$. $\square$

B. Étude du cardinal de $\mathcal{U}_n$

- 4) Notons $S = \sum_{U \in \mathcal{U}_n} U$. D'après la question 2) nous avons $SX_0 = 2u_n X_0$.
 Par ailleurs $S = h_n J$ donc $SX_0 = nh_n X_0$ car $JX_0 = nX_0$
 Ainsi $2u_n X_0 = nh_n X_0$ et comme X_0 est non nul on a $u_n = \frac{nh_n}{2}$ pour $n \geq 2$ $\square$
- 5) Fixons (i, j) avec $i \geq 2$ et $j \geq 2$ et notons $\mathcal{K}_{i,j}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_n$ ayant un 1 en position $(1, j)$ et $(i, 1)$. Alors l'application qui consiste à échanger les colonnes 2 et j et les lignes 2 et i est clairement une bijection de $\mathcal{K}_n$ sur $\mathcal{K}_{i,j}$.
 Tous ces ensembles ont donc même cardinal k_n , sont au nombre de $(n-1)^2$ et forment une partition de $\mathcal{H}_n$. En effet leur réunion est évidemment $\mathcal{H}_n$ et ils sont deux à deux disjoints : s'il existait un élément dans l'intersection de $\mathcal{K}_{i,j}$ et $\mathcal{K}_{i',j'}$ avec $i \neq i'$ par exemple, cet élément aurait trois 1 sur la première colonne ce qui est exclu.
 Il en résulte que $h_n = (n-1)^2 k_n$ pour $n \geq 2$. $\square$
- 6) $\mathcal{K}_n$ est la réunion disjointe des sous-ensembles $\mathcal{K}_{n,0}$ et $\mathcal{K}_{n,1}$ constitués des éléments dont le terme en position $(2, 2)$ vaut respectivement 0 ou 1.
 Or pour $n \geq 4$, $\mathcal{K}_{n,1}$ est en bijection avec $\mathcal{U}_{n-2}$ par l'application qui à un élément de $\mathcal{K}_{n,1}$ associe la sous-matrice constituée des $(n-2)$ dernières lignes et colonnes.
 Par ailleurs l'application qui à un élément de $\mathcal{K}_{n,0}$ associe la sous-matrice constituée des $(n-1)$ dernières lignes et colonnes dont on remplace l'élément 0 en position $(1, 1)$ par un 1 est une bijection sur $\mathcal{H}_{n-1}$
 Il en découle que $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour $n \geq 4$. $\square$
- Remarque : cette relation est encore vraie pour $n = 3$. En effet on constate facilement que $\mathcal{K}_{3,0}$ a un seul élément et que $\mathcal{K}_{3,1}$ est vide. Donc $k_3 = 1$ et on a bien $k_3 = u_1 + h_2$ puisque $u_1 = 0$ par convention et que $h_2 = 1$ clairement. Elle est également vraie pour $n = 2$ puisque $k_2 = 1$ clairement, que $u_0 = 1$ par convention et que $h_1 = 0$.

En conclusion $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour $n \geq 2$. $\square$

- 7) Il vient alors facilement à l'aide des trois questions précédentes que :

$$u_n = \frac{n(n-1)}{2} (2u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}) \text{ pour } n \geq 2 \quad \square$$
 D'où l'on tire immédiatement que :

$$w_n = \frac{1}{n} \left((n-1)w_{n-1} + \frac{1}{2}w_{n-2} \right) \text{ pour } n \geq 2 \quad (1). \quad \square$$
- 8) On prouve que $w_n \in [0, 1]$ par récurrence. Le prédicat est satisfait pour $n = 0$ et $n = 1$ et en supposant qu'il est vrai jusqu'à $n-1$ avec $n \geq 2$, il vient $0 \leq w_n \leq \frac{1}{n} \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{n} \left(n - \frac{1}{2} \right) < 1$ $\square$

Comme $w_{n-2} \geq 0$ on a $w_n \geq \frac{n-1}{n} w_{n-1}$ donc par itération $w_n \geq \frac{2}{n} w_2 = \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 2$. Donc $\sum w_n$ diverge. $\square$

Comme $\sum w_n$ diverge, le rayon de convergence R de $\sum w_n x^n$ est inférieur ou égal à 1.

Par ailleurs puisque $|w_n| \leq 1$ la série $\sum w_n x^n$ converge (absolument) pour $x \in]-1, 1[$ car $|w_n x^n| \leq |x|^n$. Donc $R \geq 1$.

En conclusion $R = 1$. $\square$

- 9) Par théorème de dérivation terme à terme d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence il vient pour $x \in]-1, 1[$ en tenant compte de la relation (1):

$$W'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)w_{n+1}x^n = w_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (nw_n + \frac{1}{2}w_{n-1})x^n.$$

Or $w_1 = 0$ et les deux séries $\sum nw_n x^n$ et $\sum w_{n-1} x^n$ convergent donc $W'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nw_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1} x^n$

$$\text{soit } W'(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} nw_n x^{n-1} + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = xW'(x) + \frac{x}{2}W(x).$$

Ainsi w est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation $2(1-x)y' - xy = 0$. $\square$

Il en découle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $W(x) = \lambda \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}$ et comme $W(0) = w_0 = 1$ il vient $W(x) = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}$ $\square$

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière.

10) $x \mapsto e^{\alpha x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $] -1, 1[$.

$x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Donc, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, Φ est développable sur $] -1, 1[$. $\square$

11) Pour $x \in]1, 1[$ on sait que $(1-x)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{(-\beta)(-\beta-1)\dots(-\beta-n+1)}{n!}$ soit encore

$$n!a_n = (-1)^n(n+\beta-1)(n+\beta-2)\dots(\beta+1)\beta = (1)^n \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)}. \text{ Ainsi } a_n = \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}. \quad \square$$

12) Comme $e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$ il vient par produit de Cauchy $\Phi_n = \sum_{p+q=n} \frac{\alpha^p}{p!} \times \frac{\Gamma(q+\beta)}{q!\Gamma(\beta)}$ soit

$$\Phi_n = \frac{1}{n!\Gamma(\beta)} \sum_{p=0}^n C_n^p \alpha^p \Gamma(n-p+\beta)$$

$$\text{Donc } n!\Gamma(\beta)\Phi_n = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^n C_n^p \alpha^p e^{-u} u^{\beta-1+n-p} \right) du = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\beta-1} \left(\sum_{p=0}^n C_n^p \alpha^p u^{n-p} \right) du$$

$$\text{Ainsi } n!\Gamma(\beta)\Phi_n = \int_0^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n du. \quad \square$$

13) • Soit $I_1(n) \stackrel{\text{DEF}}{=} \int_0^a u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n du$. Alors $|I_1(n)| \leq \int_0^a u^{\beta-1} e^{-u} (|\alpha|+u)^n du$

Or les variations (immédiates) de $u \mapsto e^{-u} (|\alpha|+u)^n$ montrent que cette fonction croît sur $[0, n-|\alpha|]$ (donc sur $[0, a]$ pour $n \geq a+|\alpha|$) puis décroît. Notons au passage qu'il faut plutôt considérer cette fonction que celle indiquée par l'énoncé qui ne croît pas sur $[0, a]$ pour $\alpha < 0$ et n pair (elle commence alors par décroître).

$$\text{Ainsi pour } n \geq a+|\alpha| : |I_1(n)| \leq e^{-a} (|\alpha|+a)^n \int_0^a u^{\beta-1} du = K_1 C^n \quad (1)$$

avec $C = a+|\alpha|$ et $K_1 = e^{-a} \int_0^a u^{\beta-1} du$ (qui converge bien car $\beta > 0$).

• Comme $a > |\alpha|$, $u \mapsto u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n$ est positive sur $[a, +\infty[$ pour tout entier n donc

$$I_2(n) \stackrel{\text{DEF}}{=} \int_a^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n du \geq \int_{a+2|\alpha|+1}^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n du$$

Or pour $u \geq a+2|\alpha|+1$ on a $\alpha+u \geq a+|\alpha|+1 = C+1$ donc $I_2(n) \geq K_2 (C+1)^n \quad (2)$

avec $K_2 = \int_{a+2|\alpha|+1}^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-u} du$ (qui converge bien).

• De (1) et (2) on tire immédiatement que $I_1(n) = o(I_2(n))$ dès que $a > |\alpha|$. $\square$

14) Comme $\Psi_n - I_2(n) = I_1(n)$ est négligeable devant $I_2(n)$, nous avons $\psi_n \sim I_2(n)$.

Notons $I_3(n) = \int_a^{+\infty} e^{-u} (\alpha+u)^{n+\beta-1} du$. Il vient :

$$I_3(n) - I_2(n) = \int_a^{+\infty} e^{-u} (\alpha+u)^{n+\beta-1} f(u) du \text{ avec } f(u) = 1 - \left(\frac{u}{\alpha+u} \right)^{\beta-1} \quad (3)$$

Or $f(u) = g(1) - g\left(\frac{u}{\alpha+u}\right)$ avec $g(x) = x^{\beta-1}$

Par ailleurs $u \mapsto \frac{u}{\alpha+u}$ est monotone (du signe de α) sur $[a, +\infty[$ de sorte que, pour tout $u \geq a$, le réel $\frac{u}{\alpha+u}$

appartient au segment $J = \left[\frac{a}{\alpha+a}, 1 \right]$ si $\alpha \geq 0$ et à $J = \left[1, \frac{a}{\alpha+a} \right]$ si $\alpha < 0$.

Comme ce segment est dans les 2 cas inclus dans $]0, +\infty[$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et donc en notant $M = \sup_{x \in J} |g'(x)|$

$$\text{on a } |f(u)| \leq M \times \left| 1 - \frac{u}{\alpha+u} \right| = \frac{M|\alpha|}{\alpha+u}$$

De (3) ci-dessus on tire alors $|I_3(n) - I_2(n)| \leq M|\alpha| \int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-2} du = M|\alpha| \times I_3(n-1)$

Pour conclure, c'est à dire prouver que $I_2(n) \sim I_3(n)$, il suffit d'établir que $I_3(n-1)$ est négligeable devant $I_3(n)$. Or une intégration par parties sur $[a, X]$ suivie d'un passage à la limite pour $X \rightarrow +\infty$ fournit immédiatement

$$0 \leq I_3(n-1) = \frac{1}{n+\beta-1} \left(I_3(n) - e^{-a}(\alpha + a)^{n+\beta-1} \right) \leq \frac{I_3(n)}{n+\beta-1} \text{ d'où la conclusion.}$$

Ainsi on a $\Psi_n \sim \int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-1} du$ dès lors que $a > |\alpha|$. $\square$

15) Le changement de variable $u \mapsto t = u + \alpha$ affine donc admissible montre que

$$\int_a^{+\infty} e^{-u}(\alpha + u)^{n+\beta-1} du = e^\alpha \int_{\alpha+a}^{+\infty} e^{-t}t^{n+\beta-1} dt = e^\alpha (\Gamma(n+\beta) - x_n) \text{ avec } x_n = \int_0^{\alpha+a} e^{-t}t^{n+\beta-1} dt$$

$$\text{Or } 0 \leq x_n \leq \int_0^{\alpha+a} t^{n+\beta-1} dt = \frac{(\alpha+a)^{n+\beta}}{n+\beta}$$

et comme Γ est croissante sur $[2, +\infty[$ et que $\beta > 0$ on a (pour $n \geq 2$) $\Gamma(n+\beta) \geq \Gamma(n) = (n-1)!$

Cela prouve que x_n est négligeable devant $\Gamma(n+\beta)$ donc que $\psi_n \sim e^\alpha \Gamma(n+\beta)$ $\square$

16) $\Gamma(n+\beta) = (n-1+\beta)(n-2+\beta)\dots(1+\beta)\beta \times \Gamma(\beta)$ donc (question 12) $\varphi_n \sim e^\alpha \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!}$.

En particulier avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$ qui est bien positif, il vient :

$$u_n = (n!)^2 w_n \sim (n!)^2 \times \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{(1/2)(1/2+1)\dots(1/2+n-1)}{n!} = \frac{n!}{\sqrt{e}} \times \frac{1 \times 3 \times \dots (2n-1)}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{(2n)!}{2^{2n}}$$

Or par la formule de Stirling, $(2n)! \sim \sqrt{2\pi} \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}{e^{2n}}$ d'où finalement $u_n \sim 2\sqrt{\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$ $\square$

D. Étude de rang.

17) On a évidemment $r_2 = 1$ puisque $\mathcal{U}_2$ a un seul élément (non nul).

$\mathcal{U}_3$ est constitué de 6 éléments A_i et on a $\sum_{i=1}^6 A_i = 4J$ d'après la partie A. Ainsi $J \in F = \text{vect}(A_i)$ donc on a aussi

$F = \text{vect}(J - A_i)$. Notons $B_i = J - A_i$.

Les 4 matrices B (notées B_i pour i de 1 à 4) ayant un 0 en position (0,0) sont telles que les 4 sous-matrice B'_i obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne forment la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc elles forment un système libre.

En leur adjoignant I_3 (notée B_5) qui a un 1 en position (0,0) on a encore évidemment un système libre car $\sum_{i=1}^5 \lambda_i B_i = 0$ implique $\lambda_5 = 0$ (par considération de l'élément en position (0,0)). Donc $r_3 \geq 5$.

Quitte à permuter les 4 premiers indices, on constate immédiatement que $B'_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B'_5 - B'_1 + B'_2 + B'_3 - B'_4$ et on remarque que cette relation est encore vraie avec les matrices B_i correspondantes : $B_6 = B_5 - B_1 + B_2 + B_3 - B_4$ donc $r_3 < 6$.

En conclusion $r_3 = 5$. $\square$

18) $\mathcal{U}_n$ est stable par transposition donc $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{V}_n$ par la question 2. $\square$

Soit $A \in \mathcal{V}_n$ et λ et μ les valeurs propres respectives de A et ${}^t A$ associées au vecteur propre X_0 .

On a donc $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \lambda$ pour tout i et $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \mu$ pour tout j .

En remarquant que $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)$ par le théorème de Fubini de sommation discrète sur un rectangle, on obtient $\lambda = \mu$. $\square$

19) Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} X_0$ et notons P la matrice de passage (orthogonale) de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ à cette base.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $A' = P^{-1}AP = {}^t P A P$ et on note λ un réel quelconque.

Alors $A X_0 = \lambda X_0$ si et seulement si $A' \varepsilon_1 = \lambda \varepsilon_1$ (puisque A et A' repèrent le même endomorphismes dans les bases respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$) soit si et seulement tous les éléments de la première colonne de A' sont nuls sauf éventuellement le premier qui vaut λ .

Or on a également ${}^t A' = {}^t P {}^t A P$ de sorte que de même ${}^t A X_0 = \lambda X_0$ si et seulement si ${}^t A' \varepsilon_1 = \lambda \varepsilon_1$ soit si et seulement tous les éléments de la première ligne de A sont nuls sauf éventuellement le premier qui vaut λ .

Ainsi $A \in \mathcal{V}_n$ si et seulement si tous les éléments de la première colonne et de la première ligne de $A' = {}^tPAP$ sont nuls sauf éventuellement le premier et les autres éléments quelconques.

Ces matrices A' forment un sous-espace de dimension $(n-1)^2 + 1$ et comme l'application $M \mapsto PM^tP$ est un isomorphisme de cet espace sur $\mathcal{V}_n$ on a $\dim \mathcal{V}_n = (n-1)^2 + 1$. $\square$

Comme $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{V}_n$ on a naturellement $r_n \leq (n-1)^2 + 1$. $\square$

Remarque : pour $n = 2$ on a $r_2 = 1$ et $1 \leq (2-1)^2 + 1 = 2$ et pour $n = 3$ on a $r_3 = 5$ et $5 \leq (3-1)^2 + 1 = 5$.

20) Soit B la matrice définie par $b_{i,j} = 1 - a_{i,j}$ si $i \leq 2$ et $j \leq 2$ et par $b_{i,j} = a_{i,j}$ sinon.

Cette matrice est bien sûr binaire et est obtenue à partir de A en modifiant le bloc 2×2 haut-gauche : on remplace

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ par son "complémenté" } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les autres éléments sont inchangés et que $A \in \mathcal{U}_n$ on a clairement $B \in \mathcal{U}_n$ également.

En outre tous les éléments de $A - B$ sont bien nuls sauf le bloc 2×2 haut-gauche qui vaut $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

Notons $A_{i,j}$ pour $i \geq 2$ et $j \geq 2$ la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes 2 et i et les colonnes 2 et j . C'est encore un élément de $\mathcal{U}_n$ clairement de même que la matrice $B_{i,j}$ obtenue à partir de B par la même opération. La matrice $D_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$ a tous ses éléments nuls sauf $d_{1,1} = d_{i,j} = 1$ et $d_{1,j} = d_{i,1} = -1$.

Or ces matrices $D_{i,j}$ forment un système libre car $\sum_{i,j \geq 2} \lambda_{i,j} D_{i,j}$ est une matrice dont l'élément situé en position

(i_0, j_0) avec $i_0 \geq 2$ et $j_0 \geq 2$ est λ_{i_0, j_0} puisque le terme en position (i_0, j_0) de $D_{i,j}$ est nul sauf pour $(i, j) = (i_0, j_0)$ auquel cas il vaut 1.

Il en découle que $r'_n \geq (n-1)^2$ pour $n \geq 3$. $\square$

21) On a naturellement $F_n = \text{vect}_{\text{DEF}}\{U - V\}_{U, V \in \mathcal{U}_n} \subset \mathcal{U}_n$ donc $(n-1)^2 \leq r_n \leq (n-1)^2 + 1$ pour $n \geq 3$.

Mais en outre l'inclusion précédente est stricte. En effet vu que $UX_0 = 2X_0$ pour tout élément $U \in \mathcal{U}_n$, on a $MX_0 = 0$ pour tout $M \in F_n$. Ainsi si U est un élément quelconque de $\mathcal{U}_n$ alors U n'appartient pas à F_n .

En conclusion $r_n = (n-1)^2 + 1$ pour $n \geq 3$ $\square$

Remarque : La restriction $n \geq 3$ est bien nécessaire vu la remarque finale à la question 19).

_____ FIN _____