Concours ENSTIM 2004
Épreuve commune de mathématiques
Problème 1 : analyse

Pour alléger, nous noterons $\varphi : x \in I \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Ainsi, $f(x) = \varphi(x)\exp\big(\varphi(x)\big)$.

1 - La décomposition en éléments simples est immédiate : $a(x) = \dfrac{1+(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$. Nous prendrons pour A la primitive nulle en 0 de a :

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \Big[\frac{1}{1-t}\Big]_0^x - \big[\ln|1-t|\big]_0^x \\ &= \frac{1}{1-x} - 1 - \ln(1-x) = \frac{x}{1-x} - \ln(1-x) \end{aligned}$$

► L'expression «intégrer une équation différentielle» est passée de mode.

---

2 - Comme 1 n'appartient pas à l'intervalle I, les solutions de E sur I sont celles de l'équation différentielle $y' = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}y$, soit $y' = a(x)y$. Nous savons que les solutions sont les fonctions $x \in I \mapsto \lambda\exp\big(A(x)\big) = \lambda\exp\Big(\dfrac{x}{1-x}\Big) \times \dfrac{1}{1-x}$. En fait, il est commode d'écrire $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1 = \varphi(x) - 1$; en notant $\mu = \lambda/e$, l'expression des solutions devient : $x \in I \mapsto \dfrac{\lambda}{e}\varphi(x)\exp\big(\varphi(x)\big) = \mu f(x)$. Concluons :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } E \text{ sur } I \text{ est la droite vectorielle engendrée par } f}$$

► Une lecture soigneuse de l'énoncé montre qu'il vaut mieux laisser de côté provisoirement cette question : nous déterminerons à la question **8b** le $DL_4(0)$ de f ; nous pourrons alors revenir sur la question **3** en toute sécurité.

---

3 - Notons $v(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1$. Nous avons $v(x) \underset{0}{=} x + x^2 + x^3 + o(x^3)$; par ailleurs, $\exp(y) \underset{0}{=} 1 + y + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{6} + o(y^3)$. Nous allons remplacer y par $v(x)$ dans ce développement limité. Nous commençons par deux calculs auxiliaires : $v(x)^2 \underset{0}{=} x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ et $v(x)^3 \underset{0}{=} x^3 + o(x^3)$. En reportant, il vient :

$$f(x) = \varphi(x)\exp\big(\varphi(x)\big) = \big(1+v(x)\big)\exp\big(1+v(x)\big) \underset{0}{=} \big(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\big) \times e \times e^{v(x)}$$

Calculons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{v(x)}$, en utilisant le fait que $v(x)$ est équivalent à x quand x tend vers 0 :

$$\begin{aligned} e^{v(x)} &\underset{0}{=} 1 + v(x) + \frac{v(x)^2}{2} + \frac{v(x)^3}{6} + o\big(v(x)^3\big) \\ &\underset{0}{=} 1 + \big(x + x^2 + x^3 + o(x^3)\big) + \frac{x^2 + 2x^3 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à reporter :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} e\big(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\big)\Big(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &\underset{0}{=} \boxed{e\Big(1 + 2x + \frac{7x^2}{2} + \frac{17x^3}{3} + o(x^3)\Big)} \end{aligned}$$

---

4 - Nous allons raisonner par récurrence sur n ; notons $\mathcal{A}(n)$ l'assertion suivante :

«il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\big(\varphi(x)\big)\exp\big(\varphi(x)\big)$ pour tout $x \in I$ »

- Comme $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{1-x}\exp\big(\varphi(x)\big)$, l'assertion $\mathcal{A}(0)$ est vérifiée, en prenant $P_0 = X$.
- Supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Alors :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\big(f^{(n)}(x)\big) = \frac{d}{dx}\Big(P_n\big(\varphi(x)\big)\exp\big(\varphi(x)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}P_n'\big(\varphi(x)\big)\exp\big(\varphi(x)\big) + P_n\big(\varphi(x)\big) \times \frac{1}{(1-x)^2}\exp\big(\varphi(x)\big) \\ &= \big(\varphi(x)\big)^2\Big(P_n\big(\varphi(x)\big) + P_n'\big(\varphi(x)\big)\Big)\exp\big(\varphi(x)\big) \end{aligned}$$

Notons $P_{n+1} = X^2(P_n + P_n')$: il est clair que P_{n+1} est un polynôme ; de plus, pour tout $x \in I$, nous avons :

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\big(\varphi(x)\big)\exp\big(\varphi(x)\big)$$

Ceci établit $\mathcal{A}(n+1)$.

• Par récurrence, l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie quel que soit le naturel n.

---

5 - Nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
&P_0 = X\\
&P_1 = X^2(P_0 + P_0') = X^2(X+1) = X^3 + X^2\\
&P_2 = X^2(P_1 + P_1') = X^2(X^3 + X^2 + 3X^2 + 2X) = X^5 + 4X^4 + 2X^3\\
&P_3 = X^2(P_2 + P_2') = X^2(X^5 + 4X^4 + 2X^3 + 5X^4 + 16X^3 + 6X^2) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4
\end{aligned}$$

Nous établirions facilement que P_n est unitaire, de degré $2n+1$; que ses coefficients sont tous dans $\mathbb{N}$; plus précisément, que les coefficients non nuls sont ceux des termes de degré $n+1$ à $2n+1$ inclus.

---

6 - Nous allons appliquer la formule de LEIBNIZ ; ceci est licite, car les deux fonctions $x \in I \mapsto (1-x)^2 f'(x)$ et $x \in I \mapsto (2-x)f(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous partons de $\dfrac{d^n}{dx^n}\big((1-x)^2 f'(x)\big) = \dfrac{d^n}{dx^n}\big((2-x)f(x)$; il vient

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}\big((1-x)^2\big)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\big(f'(x)\big) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(2-x)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\big(f(x)\big)$$

Mais $\dfrac{d^k}{dx^k}\big((1-x)^2\big) = 0$ pour $k > 2$, et $\dfrac{d^k}{dx^k}(2-x) = 0$ pour $k > 1$. Notre égalité se réduit donc à :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

En regroupant, il vient :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) = \big(2n(1-x) + 2 - x\big)f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x)$$

Divisions les deux membres par $(1-x)^2$, et remplaçons $2-x$ par $1 + (1-x)$ dans le facteur qui apparaît au membre de droite :

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \big(\varphi(x)\big)^2\big((2n+1)(1-x)+1\big)f^{(n)}(x) - n^2\big(\varphi(x)\big)^2 f^{(n-1)}(x)\\
&= \Big((2n+1)\varphi(x) + \big(\varphi(x)\big)^2\Big)f^{(n)}(x) - n^2\big(\varphi(x)\big)^2 f^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

Utilisons le résultat de la question **6**, il vient :

$$\begin{aligned}
P_{n+1}\big(\varphi(x)\big)\exp\big(\varphi(x)\big) = &\Big((2n+1)\varphi(x) + \big(\varphi(x)\big)^2\Big)P_n\big(\varphi(x)\big)\exp\big(\varphi(x)\big)\\
&- n^2\big(\varphi(x)\big)^2 P_{n-1}\big(\varphi(x)\big)\exp\big(\varphi(x)\big)
\end{aligned}$$

Nous pouvons simplifier par $\exp\big(\varphi(x)\big)$, qui n'est certainement pas nul ; en notant $y = \varphi(x)$, l'égalité précédente devient :

$$P_{n+1}(y) = \big((2n+1)y + y^2\big)P_n(y) - n^2y^2P_{n-1}(y)$$

y décrit l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ lorsque x décrit I. Donc les polynômes P_{n+1} et $\big((2n+1)X + X^2\big)P_n - n^2X^2P_{n-1}$ sont égaux, puisque leur différence s'annule une infinité de fois.

• Le raisonnement tenu précédemment vaut pour $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\big((2n+1)X + X^2\big)P_n - n^2X^2P_{n-1} &= (3X + X^2)P_1 - X^2P_0 = (3X + X^2)(X^3 + X^2) - X^2X\\
&= 3X^4 + X^5 + 3X^3 + X^4 - X^3 = X^5 + 4X^4 + 2X^3\\
P_{n+1} = P_2 &= X^5 + 4X^4 + 2X^3
\end{aligned}$$

Donc la formule est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

---

7 - D'après la question 4, $a_n = f^{(n)}(0) = eP_n(1)$ pour tout naturel n. En évaluant en 1 les deux membres de l'égalité établie à la question 6, il vient :

$$a_{n+1} = eP_{n+1}(1) = e\big(2(n+1)P_n(1) - n^2P_{n-1}(1)\big) = 2(n+1)eP_n(1) - n^2eP_{n-1}(1) = \boxed{2(n+1)a_n - n^2a_{n-1}}$$

8a - Immédiat, avec ce que nous venons de faire et les calculs de la question 5 : $a_0 = eP_0(1) = e$; $a_1 = eP_1(1) = 2e$; $a_2 = eP_2(1) = 7e$; $a_3 = eP_3(1) = 34e$ et $a_4 = eP_4(1) = 209e$. La remarque faite à la question 5 implique que les a_k/e sont tous naturels non nuls.

8b - La formule de Taylor-Young s'applique, puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et nous donne :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{0\leqslant k\leqslant 4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^4) \underset{0}{=} \sum_{0\leqslant k\leqslant 4} \frac{a_k}{k!}x^k + o(x^4) \underset{0}{=} \boxed{e\left(1+2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{17}{3}x^3+\frac{209}{24}x^4\right)+o(x^4)}$$

Par troncature, nous retrouvons le résultat de la question 3, et c'est heureux.

---

9 - Il s'agit cette fois de la formule de Taylor avec reste intégral ; si g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors :

$$g(b) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\, dt$$

Remplaçons g par exp, a par 0, b par 1, n par p et k par i, comme $\exp^{(k)} = \exp$, il vient :

$$e = \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}e^t\, dt$$

Notons $R(p)$ le reste intégral ; il s'agit de prouver que ce reste tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Or, pour $t\in[0,1]$, nous avons clairement $0 \leqslant (1-t)^p e^t \leqslant e(1-t)^p$, donc :

$$0 \leqslant R(p) \leqslant \frac{e}{p!}\int_0^1 (1-t)^p\, dt = \frac{e}{p!}\left[-\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{e}{p!}\times\frac{1}{p+1} = \frac{e}{(p+1)!}$$

et la conclusion est immédiate.

10a - $S_p(0) = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{i!} = u_p$ et :

$$S_p(1) = \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(1+i)!}{(i!)^2} = \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(i+1)i!}{(i!)^2} = \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{i}{i!} + \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{i!} = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \frac{i}{i!} + u_p = \sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} \frac{i}{i!} + u_p = u_{p-1} + u_p$$

Nous avons éliminé, dans la première somme du membre de droite, le terme d'indice 0, qui est nul, puis effectué dans cette somme le changement d'indice $i' = i-1$.

10b - Le résultat de la question 9 nous donne $\lim\limits_{p\to\infty} S_p(0) = e$ et $\lim\limits_{p\to\infty} S_p(1) = 2e$.

---

11 - Notons $G_p(n) = S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1)$ le membre de gauche de l'égalité à établir. Les trois sommes qui apparaissent dans $G_p(n)$ s'appliquent au même intervalle discret, ce qui permet de les regrouper ; de plus, nous pouvons tout écrire sur le même dénominateur $(i!)^2$, puis mettre en facteur $(n-1+i)!$ au numérateur :

$$\begin{aligned}
G_p(n) &= \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(n+1+i)!}{(i!)^2} - 2(n+1)\sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} + n^2 \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2} \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(n+1+i)! - 2(n+1)(n+i)! + n^2(n-1+i)!}{(i!)^2} \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \left((n+1+i)(n+i) - 2(n+1)(n+i) + n^2\right)\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}
\end{aligned}$$

or $(n+1+i)(n+i) - 2(n+1)(n+i) + n^2 = i^2 - (n+i)$, ce qui nous donne :

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{i^2(n-1+i)!}{(i!)^2} - \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(n+i)(n-1+i)!}{(i!)^2}$$

Dans la première somme, le terme d'indice 0 est nul ; après élimination de ce terme, nous pouvons simplifier $\dfrac{i^2}{(i!)^2}$ en $\dfrac{1}{((i-1)!)^2}$, ce qui nous mènera au changement d'indice $i' = i-1$. Dans la deuxième somme, $(n+i)(n-1+i)! = (n+i)!$. Il vient :

$$\begin{aligned}
G_p(n) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \frac{i^2(n-1+i)!}{(i!)^2} - \sum_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2} - S_p(n) \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} - S_p(n) = S_{p-1}(n) - S_p(n)
\end{aligned}$$

Et ceci termine la preuve.

---

12 - Nous allons raisonner par récurrence sur n. Nous noterons $\mathcal{B}(n)$ l'assertion suivante :

« la suite $p \mapsto S_p(n)$ converge »

De plus, nous noterons λ_n la limite (si elle existe) de cette suite.

- À la question **10b**, nous avons montré que la suite $p \mapsto S_p(0)$ converge (vers e), et que la suite $p \mapsto S_p(1)$ converge (vers $2e$). Ceci établit donc $\mathcal{B}(0)$ et $\mathcal{B}(1)$.
- Supposons $\mathcal{B}(n-1)$ et $\mathcal{B}(n)$ acquises, avec $n \geqslant 1$. Alors la suite

$$p \mapsto S_p(n+1) = (2n+2)S_p(n) - n^2 S_p(n-1) + S_{p-1}(n) - S_p(n) = (2n+1)S_p(n) - n^2 S_p(n-1) + S_{p-1}(n)$$

converge vers $2(n+1)\lambda_n - n^2\lambda_{n-1}$. Ceci établit $\mathcal{B}(n+1)$.
- Par récurrence « du deuxième ordre », l'assertion $\mathcal{B}(n)$ est vraie pour tout naturel n, et nous avons $\lambda_{n+1} = 2(n+1)\lambda_n - n^2\lambda_{n-1}$.

---

13 - Nous remarquons que $a_0 = e = \lambda_0$ et $a_1 = 2e = \lambda_1$. D'autre part, les suites de termes généraux respectifs a_n et λ_n vérifient la même relation de récurrence linéaire du deuxième ordre :

$$a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2 a_{n-1}$$
$$\lambda_{n+1} = 2(n+1)\lambda_n - n^2\lambda_{n-1}$$

Donc $a_n = \lambda_n$ pour tout naturel n. Mais par définition, $\lambda_n = \lim\limits_{p\to\infty} S_p(n) = \lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{0\leqslant i\leqslant p} \dfrac{(n+i)!}{(i!)^2}$. Pour avoir l'autre expression, il suffit de remarquer que $\dfrac{(n+i)!}{(i!)^2} = n!\dfrac{(n+i)!}{n!i!i!} = n!\dfrac{(n+i)!}{n!i!} \times \dfrac{1}{i!} = n!\binom{n+i}{i}\dfrac{1}{i!}$.

Quelques remarques complémentaires

- J'ai mis 0h40 pour rédiger le brouillon, et 1h40 pour saisir le texte ; la rédaction manuscrite aurait sans doute été plus rapide, mais je ne pense pas pouvoir la réaliser en moins d'une heure. En principe, on évalue le temps-étudiant au triple du temps professeur. Conclusion : problème intéressant, mais trop difficile.
- Il y avait plusieurs écueils dans ce texte : à la question **3**, il est facile d'oublier le facteur e dans le développement de $\exp(\varphi(x))$. À la question **4**, j'ai constaté que sur cinq étudiants, un seul avait donné l'expression correcte de P_{n+1} : des difficultés avec la dérivée d'une composée ! À la question **6**, le calcul est délicat, car il faut faire apparaître systématiquement $\dfrac{1}{1-x}$; et la justification rigoureuse de l'égalité des polynômes demande un peu de finesse. Enfin, il est facile d'écrire $S_n(p)$ au lieu de $S_p(n)$...